Pravoúhlý trojúhelník – goniometrické funkce

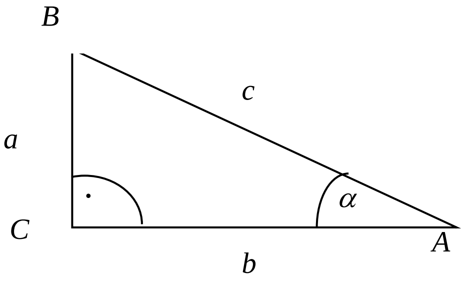
V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou definovány funkce úhlu α : sin α , cos α, tg α , cotg α takto:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ protilehlá odvěsna ku přeponě

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ přilehlá odvěsna ku přeponě

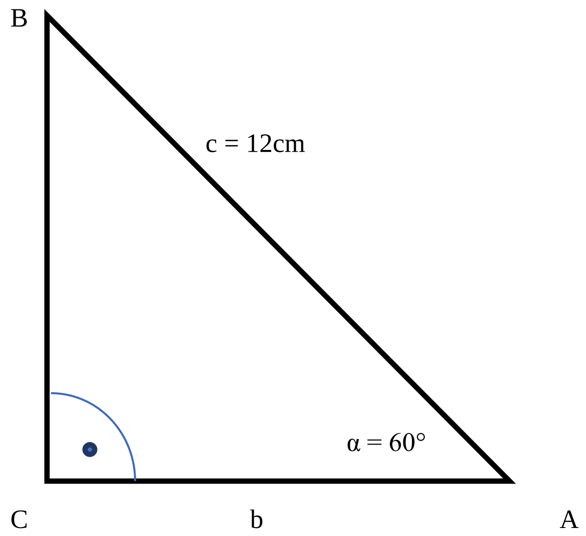
$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$ protilehlá odvěsna ku přilehlé odvěsně

$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ přilehlá odvěsna ku protilehlé odvěsně



Výpočet stran pravoúhlého trojúhelníka pomocí goniometrických funkcí

Příklad: Vypočti chybějící strany



Známe přeponu, proto použijeme funkci, která je definována pomocí přepony – tj. sin nebo cos.

Výpočet strany a

$\sin 60° = \frac{a}{12}$

Urči hodnotu sin 60° a dosaď do rovnice.

$0{,}866 = \frac{a}{12}$ / · 12

$10{,}39 = a$

a = 10,39 cm

Výpočet strany b

$\cos 60° = \frac{b}{12}$

Urči hodnotu cos 60° a dosaď do rovnice.

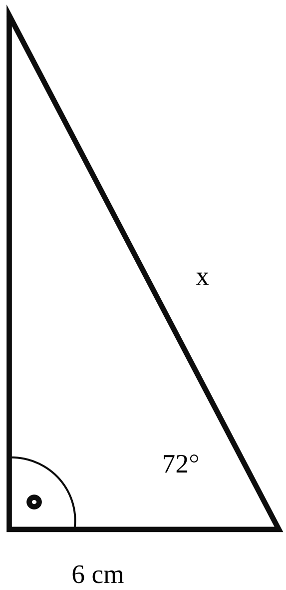
$0{,}5 = \frac{b}{12}$ / · 12

$6 = b$

b = 6 cm

Stranu b je možné vypočítat i pomocí Pythagorovy věty.

Příklad: Vypočti přeponu



Znám **přilehlou** odvěsnu, chci vypočítat **přeponu** → použiji funkci **cosinus.**

$\cos 72° = \frac{6}{x}$

$0,309 = \frac{6}{x} \quad /\cdot x$

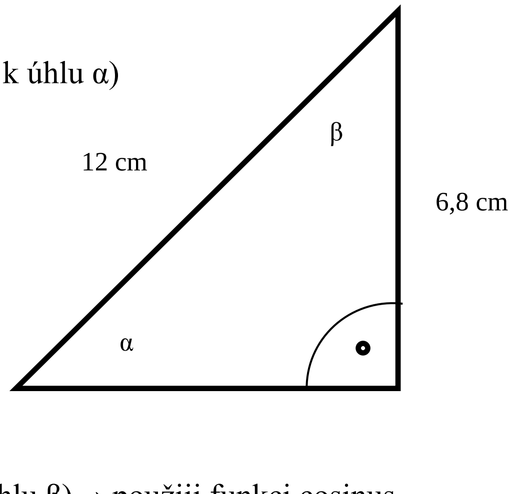
$0,309 \cdot x = 6 \qquad /: 0,309$

<u>x = 19,42 cm</u>

<u>Výpočet úhlů pravoúhlého trojúhelníka pomocí goniometrických funkcí</u>

Příklad: Vypočti velikosti ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku

Výpočet úhlu α
Známe přeponu a protilehlou odvěsnu (vzhledem k úhlu α)
→ použijeme funkci sinus.



$\sin \alpha = \frac{6,8}{12}$

$\sin \alpha = 0,5667$

$\alpha = 34° \, 31'$

Výpočet úhlu β
Znám přeponu a přilehlou odvěsnu (vzhledem k úhlu β)→ použiji funkci cosinus.

$\cos \beta = \frac{6,8}{12}$

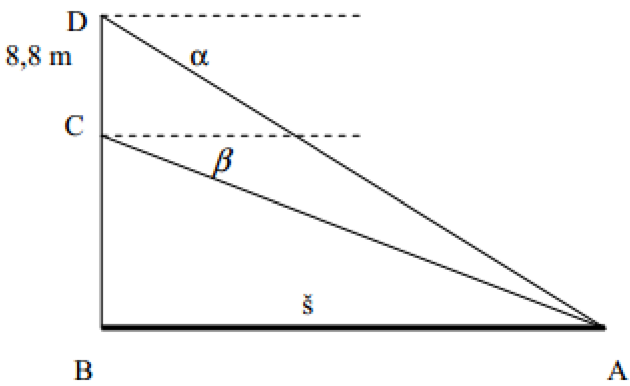
$\cos \beta = 0,5667$

<u>β = 55° 29´</u>

(Úhel β bylo možné dopočítat i jako třetí úhel v trojúhelníku
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$34°31' + \beta + 90° = 180°$)

Praktické úlohy

1. Ze dvou oken C, D , která jsou $8{,}8\ \mathrm{m}$ nad sebou v budově stojící přímo u řeky, je vidět ve směru kolmém na tok řeky místo A na protějším břehu řeky pod hloubkovými úhly $\alpha = 12°50'$, $\beta = 6°10'$. Vypočtěte šířku řeky $š$.



Řešení:
Řešíme trojúhelník ACD:
Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu D: $90° - \alpha = 90° - 12°50' = 77°10'$
Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu C: $90° + \beta = 90° + 6°10' = 96°10'$
Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu A: $180° - (77°10' + 96°10') = 6°40'$

Trojúhelník ACDje určen podle věty usu.

$$\frac{|AC|}{\sin 77°10'} = \frac{8{,}8}{\sin 6°40'}$$

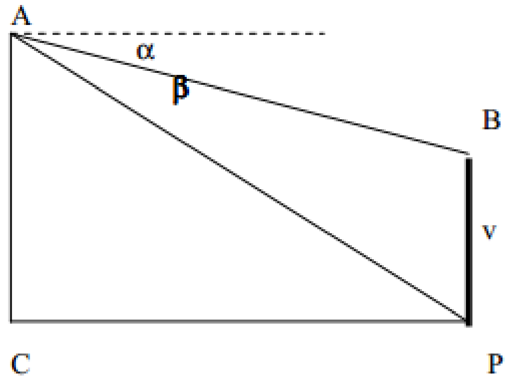
$$|AC| = \frac{8{,}8}{\sin 6°40'} . \sin 77°10'$$

$|AC| = 74\ \mathrm{m}$

Řešíme pravoúhlý trojúhelník ABC
Velikost úhlu při vrcholu C $90° - \beta = 90° - 6°10' = 83°50'$
$\sin 83°50' = \frac{|AB|}{|AC|}$
$|AB| = |AC| \cdot \sin 83°50'$
$|AB| = 74 \cdot \sin 83°50'$
$|AB| = 73{,}5\ \mathrm{m}$

Šířka řeky je 73,5 m .

2. Z místa A ležícího ve výšce $158\ \mathrm{m}$ nad vodorovnou rovinou procházející patou věže je vidět vrchol B věže pod hloubkovým úhlem o velikosti $\alpha = 19°10'$ a patu věže pod hloubkovým úhlem $\beta = 28°30'$. Určete výšku věže.



Řešení:

Řešíme $\Delta\mathrm{ACP}$:

Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu A: $90° - \beta = 90° - 28°30' = 61{,}5°$

Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu P: $90° - 61{,}5° = 28{,}5°$

$\cos 61{,}5° = \frac{|\mathrm{AC}|}{|\mathrm{AP}|}$

$|\mathrm{AP}| = \frac{|\mathrm{AC}|}{\cos 61{,}5°}$

$|\mathrm{AP}| = \frac{158}{\cos 61{,}5°}$

$|\mathrm{AP}| = 331{,}13\ \mathrm{m}$

Řešíme $\Delta\mathrm{ABP}$:

Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu A: $\beta - \alpha = 28°30' - 19°10' = 9°20'$

Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu P: $90° - 28{,}5° = 61{,}5°$

Vypočítáme velikost úhlu při vrcholu B: $180° - (9°20' + 61{,}5°) = 109°10'$

Trojúhelník ABP je určen podle věty usu.

$$\frac{|BP|}{\sin 9°20'} = \frac{|AP|}{\sin 109°10'}$$

$$|BP| = \frac{|AP|}{\sin 109°10'} \cdot \sin 9°20'$$

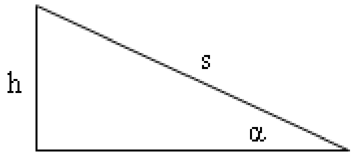
$$|BP| = \frac{331{,}13}{\sin 109°10'} \cdot \sin 9°20'$$

$$|BP| = 56{,}85\ \mathrm{m}$$

Výška věže je $56{,}85\ \mathrm{m}$.

3. Jaký je úhel stoupání cesty, pokud na dopravní značce, která o tom informuje, je napsáno $6{,}7\%$? Jaký výškový rozdíl auto překonalo na dráze $2{,}3\ \mathrm{km}$?

Řešení:

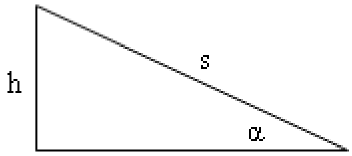


$$6{,}7\% = \frac{6{,}7}{100} = 0{,}067 \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}067 \Rightarrow \alpha = 3{,}83°$$
$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$
$$h = s \cdot \sin\alpha$$
$$h = 2{,}3 \cdot \sin 3{,}83°$$
$$h = 0{,}154\ \mathrm{km} = 154\ \mathrm{m}$$

Úhel stoupání cesty je$3{,}83°$.
Auto překonalo výškový rozdíl asi $154\ \mathrm{m}$.

4. Jak vysoko vystoupá letadlo letící rychlostí $225\ \mathrm{km/h}$ za 10 minut, stoupá-li pod úhlem $5°$?

Řešení:



$60\ \mathrm{min}$ ....$225\ \mathrm{km}$
$10\ \mathrm{min}$ .... $s\ \mathrm{km}$

$$s = 225 \cdot \frac{10}{60}$$
$$s = 37{,}5\ \mathrm{km}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$
$$h = s \cdot \sin\alpha$$
$$h = 37{,}5 \cdot \sin 5°$$
$$h = 3{,}27\ \mathrm{km}$$

Letadlo vystoupá do výšky $3{,}27\ \mathrm{km}$.

Další úlohy o pravoúhlém trojúhelníku

1. V pravoúhlém trojúhelníku DEF je dána velikost přepony d = 8 cm, a velikost úhlu β u vrcholu F , β = 62°40´. Určete velikosti všech stran a vnitřních úhlů.
   [α = 27°20´ ; f = 7,11 cm ; e = 3,67 cm]
2. Nosník má vodorovné rameno délky d = 95 cm . Určete délku x šikmého ramene , svírá - li s vodorovným směrem úhel β = 50°.
   [148 cm]
3. Vypočtěte délku stran rovnoramenného trojúhelníku ABC, je - li v_c = 8,4 cm , úhel při základně α = 32°10´.
   [c = 26,66 cm , a = 15,77 cm]
4. Na hmotný bod působí dvě síly téže velikosti $F_1 = F_2$ = 36 N., které svírají úhel α = 65°. Určete velikost výslednice F.
   [60,7 N]
5. Vzdálenost dvou železničních stanic je 4000 m . Stoupání železniční trati je 8‰. Vypočtěte výškový rozdíl stanic a úhel stoupání.
   [α = 0°27´ , d = 32 m]
6. Schodiště s 50 schody má výšku 9 m a sklon 24°. Vypočtěte výšku v a šířku c jednoho schodu.
   [v = 0,18 m ; c = 0,404 m]
7. Vypočtěte výšku vodárenské věže , je - li měřící přístroj od její paty vzdálen 85 m a je-li výškový úhel α = 18°30´.
   [28,44 m]
8. Vypočtěte výškový rozdíl dvou stanic lanovky, jestliže její stoupání je 67‰ a délka jednoduchého lana 930 m .
   [62,2 m]
9. Na hmotný bod působí síla o velikosti F = 35 N , která svírá s osou y úhel α = 25°40´. Rozložte tuto sílu na složky F_x a F_y .
   [F_x = 15,16 N ; F_y = 31,55 N]
10. Štít střechy má tvar rovnoramenného trojúhelníku. Šířka je 12,8 m , sklon střechy 38°. Vypočtěte výšku štítu.
    [5 m]
11. Štít na domě 12,5 m širokém má tvar rovnoramenného trojúhelníka o výšce 4 m. Jaký úhel svírají obě části střechy?
    [114°46´]
12. Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa té roviny ve výškovém úhlu 39°25´. Přiblížíme-li se k ní o 50m , vidíme vrchol věže V pod úhlem 58°42´. Jak vysoká je věž ?
    [82,1 m]
13. Z vrcholu pahorku ležícího 75 m nad vodní hladinou je vidět přesně za sebou 2 lodičky pod hloubkovými úly α = 64° , β = 48°. Určete jejich vzdálenost.
    [31 m]
14. Úhel nakloněné roviny je 18° 30´ . Jak velká síla udrží v rovnováze břemeno působící tíhovou sílou 520 N , působí-li rovnoběžně s nakloněnou rovinou ?
    [165 N]
15. Úhel nakloněné roviny je 18° 30´ . Jak velká síla udrží v rovnováze břemeno působící tíhovou sílou 520 N , působí-li rovnoběžně se základnou nakloněné roviny ?
    [174 N]
16. V jaké zeměpisné šířce vrhá svislá tyč vysoká 2,5 m v době rovnodennosti v poledne na vodorovnou rovinu stín 3,6 m dlouhý ?
    [55°13´]
17. Z okna ležícího 8 m nad horizontální rovinou vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu 53°20´, její patu v hloubkovém úhlu 14°15´. Jak vysoká je věž ?
    [50,3 m]
18. Dvě kolmé síly F_1 = 12N a F_2 = 5 N působí v jednom bodě. Jaká výslednice má stejný účinek jako obě tyto síly a jaké úhly svírá se směry sil F_1 a F_2 ?
    [13 N , 22°31´ , 67°29´]