ANALYTICKÁ GEOMETRIE PŘÍMKY

Příklad 1

Body $A[2;4], B[4;-6]$ určují přímku AB. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem MN, kde $M[-4;-3], N[1;-2]$ a je kolmá k přímce AB.

Řešení:

Parametrické vyjádření AB je:

$$\begin{aligned} x &= 2+2t \\ y &= 4-10t, t \in R \end{aligned} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = (2;-10) = (1;-5) = n_p$$

$$S_{MN}\left[\frac{-3}{2};\frac{-5}{2}\right]$$

Obecná rovnice přímky, která má normálový vektor (1;-5,) je: x – 5y + c = 0.

$$S_{MN}\left[\frac{-3}{2};\frac{-5}{2}\right] \in p: \quad \frac{-3}{2} - 5.\left(\frac{-5}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -11$$

Rovnice přímky p tedy je: x – 5y -11 = 0.

Příklad 2

Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

p:	**q:**
$x = 1 - t$ $y = 3 + 2t, t \in R$	3x – 2y + 1 = 0

Řešení

Parametrické vyjádření přímky p převedeme na obecnou rovnici. Určíme směrový vektor přímky p: $\vec{u} = (-1;2) \Rightarrow \vec{n} = (2;1)$. *Normálový vektor přímky q je (3;-2).*

(2;1) ∦ k ·(3;-2)⇒ přímky jsou různoběžné a tedy určíme jejich průsečík.

Obecná rovnice přímky s normálovým vektorem (2;1) je: 2x + y +c = 0.

Nalezneme bod přímky p: $C[1;3]$.

$C \in p$ *⇒ 2·1 + 3 + c = 0 ⇒ c = 5*

Obecná rovnice přímky p tedy je: 2x + y + 5 = 0.

Průsečík přímek je bod, který splňuje obecné rovnice obou přímek tj.:

2x + y + 5 = 0

3x – 2y + 1 = 0

Vyřešíme soustavu rovnic: $x = \frac{-11}{7}, y = \frac{-13}{7}$.

Průsečík přímek p a q je tedy bod P $\left[\frac{-11}{7}; \frac{-13}{7}\right]$**.**

Příklad 3

Jsou dány body $A[1;4;6;], B[4;1;-3]$:

a) **Napište parametrické vyjádření přímky AB.**
b) **Napište parametrické vyjádření polopřímky BA.**
c) **Napište parametrické vyjádření úsečky AB.**

Řešení:

$$\vec{u}_{AB} = B - A = (3;-3;-9) = (1;-1;-3)$$

a)	b)	c)
$\leftrightarrow AB:$	$\rightarrow BA:$	$AB:$
$x = 1 + t$	$x = 4 - t$	$x = 1 + t$
$y = 4 - t$	$y = 1 + t$	$y = 4 - t$
$z = 6 - 3t, t \in R$	$z = -3 + 3t, t \in \langle 0; \infty)$	$z = 6 - 3t, t \in \langle 0;3 \rangle$

Příklad 4

Jsou dány přímky p = {[m + 2t; 3t; 6 – 4t], tϵR} a q = {[5 + s; 1 – 4s; -4 + s], sϵR }. Určete číslo m tak, aby přímky p a q byly různoběžné a zjistěte jejich průsečík.

Řešení:

Přímky p a q jsou různoběžné právě tehdy, když existují reálná čísla t, s, m tak, že platí:

m + 2t = 5 + s
3t = 1 – 4s
6 – 4t = -4 + s.

Z druhé a třetí rovnice vypočítáme t = 3, s = -2. Dosadíme do první rovnice a dostaneme

m = -3.

*Dosadíme vypočtené hodnoty t a m do parametrického vyjádření přímky p (nebo s do parametrického vyjádření q) a dostaneme souřadnice průsečíku **P[3;9;-6].***

Úlohy k procvičení:

1) Určete vzájemnou polohu přímek p a q. V případě, že jsou různoběžné, určete průsečík.
   a) p: 2x – 6y + 5 = 0
      q: 3x – 9y + 7 = 0
   b) p = {[3 – 2t; 1 + 3t], tϵR }
      q = {[4 + 3r; 7 – 2r], rϵR }
   c) p: 2x + 3y -7 = 0
      q = {[2 + 3t; 1 - 2t], tϵR }
   d) p = {[5 + 3t; 8 - 6t; -6 + 9t], tϵR }
      q = {[7 - 2r; -1 + 4r; -6r], rϵR }
   e) p = {[1 + t; 3 - 2t; -1 + 3t], tϵR }
      q = {[2 + 2r; 5 + 3r; -2 - r], rϵR }
   f) p = {[1 + t; 3 - 2t; -1 + 3t], tϵR }
      q = {[2 + 2r; 5 + 3r; r], rϵR }

   [a) rovnoběžné různé, b) různoběžné P[-5;13], c) totožné, d)rovnoběžné různé, e) různoběžné P $\left[\frac{6}{7};\frac{23}{7};-\frac{10}{7}\right]$, *c) mimoběžné].*

2) Body A[2;4], B[4;2], C[4;1] jsou vrcholy trojúhelníku ABC.

   a) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží výšky v_a, v_b, v_c a vypočítejte souřadnice jejich průsečíku.

   b) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice t_a, t_b, t_c a vypočítejte souřadnice těžiště.

   [$v_a : y-4=0, v_b : 2x-3y-2=0, v_c : x-y-3=0, V[7;4]$

   $t_a : 5x+4y-26=0, v_b : x+2y-8=0, v_c : 2x+y-9=0, T\left[\frac{10}{3};\frac{7}{3}\right]$ *].*

3) Jsou dány dvě přímky p: ax + (2b - 1)y + c + 3 = 0, q: 2x -(b + 2)y – 2c = 0. Pro které hodnoty a, b, c ϵ R jsou dané přímky
   a) totožné rovnoběžky,
   b) různé rovnoběžky,
   c) dvě různoběžky, které se protínají v bodě P[5;0]?
      [a) a = 2, b = -1/3, c = -1, b) a = 2, b = -1/3, c ≠ -1, c) a = -8/5, b ≠13/6,c = 5].

ODCHYLKY PŘÍMEK A ROVIN ŘEŠENÉ ANALYTICKOU METODOU

Příklad 1

Určete odchylku zadaných útvarů:

a) **p = {[2;3;t], tϵR},q = {[s;0;-s], sϵR}**
b) **p = {[t;t;0], tϵR}, α: x - y = 0**
c) **α: x - y + 9 = 0, β: y - 11 = 0**

Řešení:

a) *Nejprve určíme směrové vektory přímek p a q:* $\vec{u}_p = (0;0;1), \vec{u}_q = (1;0;-1).$

Vypočítáme odchylku směrových vektorů obou přímek:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q\right|}{\left|\vec{u}_p\right| \cdot \left|\vec{u}_q\right|} = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°$$

Odchylka přímky p a roviny α je 45°.

b) $\vec{u}_p = (1;1;0), \vec{n}_\alpha = (1;-1;0)$

Pro odchylku normálového a směrového vektoru platí:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha\right|}{\left|\vec{u}_p\right| \cdot \left|\vec{n}_\alpha\right|} = \frac{|1-1+0|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 0° \Rightarrow p \| \varphi; P[0;0;0] \in p \wedge P \in \varphi \Rightarrow p \subset \varphi.$$

Přímka p tedy leží v rovině α.

c) $\vec{n}_\beta = (0;1;0), \vec{n}_\alpha = (1;-1;0).$

Pro odchylku dvou normálových vektorů platí:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|} = \frac{|0-1+0|}{\sqrt{1}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°$$

Odchylka rovin α a β je 45°.

Příklad 2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, velikost podstavné hrany a = 6 a výška jehlanu v = $3\sqrt{2}$.

Zjistěte odchylku AV a roviny podstavy.

Řešení:

Zvolíme vhodně soustavu souřadnic tak, že A[0;6;0], B[6;6;0], C[6;0;0], D [0;0;0], V[3;3; 3√2*].*

Směrový vektor AV je $\vec{u} = \left(3;-3;3\sqrt{2}\right)$*, normálový vektor podstavy, tj. vektor kolmý k podstavě dané souřadnicovou rovinou xy je vektor* $\vec{n} = (0;0;1)$.

Odchylku tedy vypočítáme:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{u}\,.\,\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|3\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1}.\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ .$$

Odchylka AV od roviny podstavy je 45^{o}.

Příklad 3

Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li A[0;1;2], B[1;2;3], C[1;0;0].

Řešení:

Určíme směrové vektory stran trojúhelníku:

$$\vec{u} = B - A = (1;1;1)$$
$$\vec{v} = C - A = (1;-1;-2)$$
$$\vec{w} = B - C = (0;2;3)$$

Úhel α u vrcholu A má velikost

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{1-1-2}{\sqrt{3}.\sqrt{6}} = \frac{-2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 118^\circ 08'$$

Úhel u vrcholu B:

$$\cos\beta = \frac{-\vec{u}\,.-\vec{w}}{\left|-\vec{u}\right|.\left|-\vec{w}\right|} = \frac{2+3}{\sqrt{3}.\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}} \Rightarrow \varphi = 36^\circ 48'$$

A dopočítáme úhel γ ***=180^{o}- (α + β)=180^{o}- (118^{o}08’ + 36^{o}48’) = 180^{o} - 154^{o}56’ = 25^{o}04’.***

Úlohy k procvičení:

1) Najděte rovnici přímky q, která prochází bodem X[-3;0] a od přímky p: $\sqrt{3}$ x + 3y +5 = o má odchylku 60°.

[$q_1 : x+3=0, q_2 . x-\sqrt{3}y+3=0$ *].*

2) Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, jehož strany leží na přímkách o rovnicích:
x + 7y + 11 = 0, x - 3y -1 = 0, 3x + y - 7 = 0.

[α=26,57°,β=63,43°,γ=90°].

3) Vypočítejte odchylku roviny α: 2x + 2y - z- 8 = 0 a roviny určené osami x a y.

[γ = 70°32'].

4) Napište rovnici roviny σ, která prochází průsečnicí rovin α: x - y + 1 = 0 a β: 2x + y + z = 0
a zároveň je kolmá k rovině γ: 2x + y - z + 3 = 0.

[σ: 2x - 5y - z + 4 = 0].