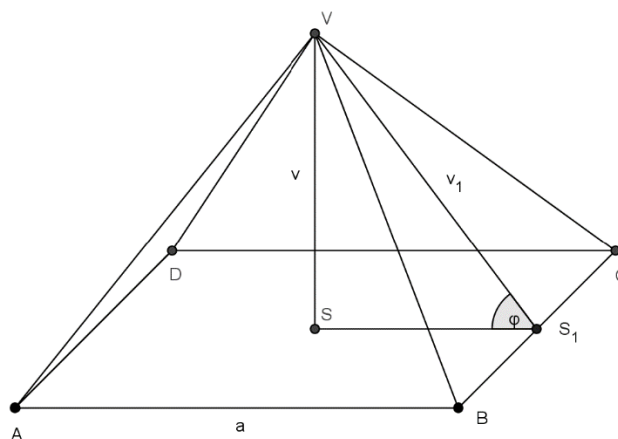


Povrchy a objemy těles

Hranol a jehlan

Řešené příklady:

1. Cheopsova pyramida má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně 230 metrů. Úhel sklonu stěn φ (odchylka roviny boční stěny a podstavy) je roven $51^{\circ}50'$.
 - a. Kolik kamenných kvádrů o objemu $1,1 \text{ m}^3$ bylo potřeba na její stavbu?
 - b. Kolik kamenných desek o ploše $0,5 \text{ m}^2$ by bylo potřeba na její vnější obložení?
 - c. Kolik tun váží kámen (žula), ze kterého je vyrobena (hustota žuly je 2900 kg/m^3)?
 - d. Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem České republiky, je-li délka hranice 2303 km?



Obr. 1

Řešení:

- a. Abychom mohli určit počet kamenných kvádrů o objemu $1,1 \text{ m}^3$ potřebných na stavbu této pyramidy, musíme určit její objem. Pro výpočet objemu budeme nejprve muset vypočítat výšku pyramidy.

Z pravoúhlého trojúhelníku VSS_1 (obr. 1) získáme rovnici:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{\frac{a}{2}}$$

$$v = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2} = \frac{230 \cdot \operatorname{tg} 51^{\circ}50'}{2}$$

$$(v \cong 144,6 \text{ m})$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3} a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot \frac{230 \cdot \operatorname{tg} 51^{\circ}50'}{2}$$

$$V \cong 2549336 \text{ m}^3$$

Počet kvádrů vypočítáme tak, že objem celé pyramidy V vydělíme objemem jednoho kvádrů V_1 :

$$n = \frac{V}{V_1}$$

$$\underline{\underline{n = 2317579}}$$

Na stavbu Cheopsovy pyramidy bylo třeba 2317579 kamenných kvádrů.

- b. Pro zjištění, kolik kamenných desek o ploše $0,5 \text{ m}^2$ by bylo potřeba na její vnější obložení, musíme vypočítat povrch bočních stěn pyramidy. Nejprve muset vypočítat výšku trojúhelníku tvořícího stěny jehlanu. Z pravoúhlého trojúhelníku VSS_1 (viz obr. 1) získáme rovnici:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$v_1 \cong 184,7 \text{ m}$$

Povrch pyramidy, který by se pokrýval obležením, je roven čtyřnásobku povrchu stěny:

$$S_s = 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} = 2 \cdot a \cdot v_1$$

$$S_s \cong 84977,9 \text{ m}^2$$

Počet kamenných desek zjistíme, když vydělíme povrch celé pyramidy povrchem jedné kamenné desky:

$$n_d = \frac{S_s}{S_1}$$

$$\underline{\underline{n_d = 169956}}$$

Na obložení Cheopsovy pyramidy bylo třeba 169956 kamenných desek.

- c. Hmotnost kamene, z něhož je vyrobena Cheopsova pyramida, zjistíme z rovnice:

$$m = V \cdot \rho$$

$$\underline{\underline{m \cong 7393074091 \text{ kg}}}$$

Kámen, ze kterého je vyrobena Cheopsova pyramida, váží přibližně 7393074 tun.

- d. Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem České republiky, je-li délka hranice 2303 km?

Tato otázka lze přeformulovat: Jak vysoký by byl kvádr o objemu Cheopsovy pyramidy o rozměrech podstavy 2303000 m a 0,6 m?

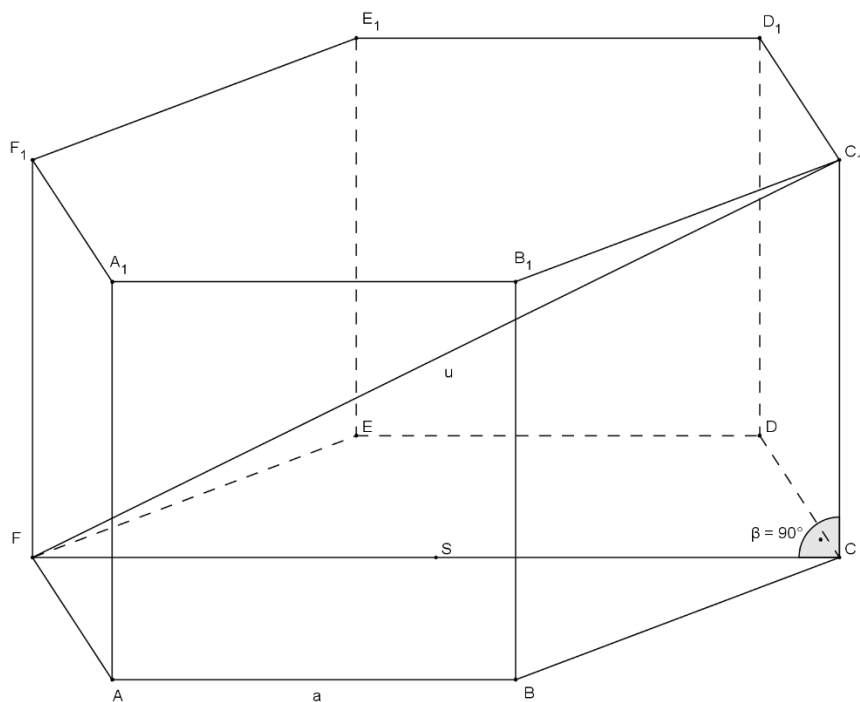
$$V_K = a \cdot b \cdot c$$

$$c = \frac{V_K}{a \cdot b} = \frac{2549336}{2303000 \cdot 0,6}$$

$$\underline{\underline{c \cong 1,84 \text{ m}}}$$

Zed' o šířce 60 cm vystavěná ze zdiva Cheopsovy pyramidy kolem České republiky by dosahovala výšky přibližně 1,84 m.

2. Urči povrch a objem kolmého pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ se stranou $a = |AB| = 6 \text{ cm}$ a tělesovou úhlopříčkou $u = |FC_1| = 15 \text{ cm}$



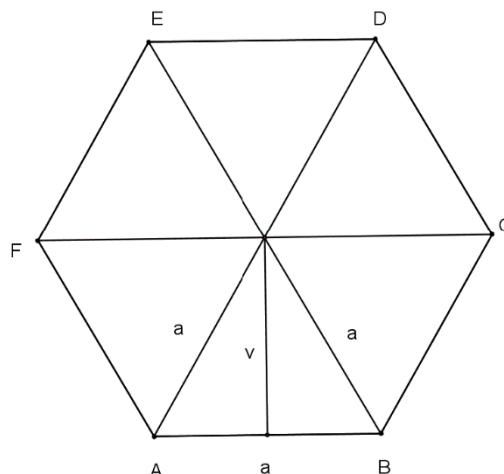
Obr. 2

Řešení:

Podstava se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků (obr. 3) o obsahu:

$$S_1 = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$



Obr. 3

Obsah podstavy se se tedy vypočítá:

$$S_p = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 6 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot a}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$$

$$S_p = \frac{3\sqrt{3} \cdot 6^2}{2} = 54\sqrt{3}$$

Plášť se skládá se šesti stejných obdélníků. Zatím neznáme výšku hranolu, ale vypočítáme ji pravoúhlého trojúhelníku FCC₁ (viz obr. 2).

$$v = \sqrt{u^2 - (2a)^2} = \sqrt{u^2 - 4a^2}$$

$$S_{pl} = 6av = 6a\sqrt{u^2 - 4a^2}$$

$$S_{pl} = 6 \cdot 6 \cdot \sqrt{15^2 - 4 \cdot 36} = 324$$

Povrch pravidelného šestibokého jehlanu tedy vypočítáme:

$$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2} + 6a\sqrt{u^2 - 4a^2} = 108\sqrt{3} + 36\sqrt{15^2 - 12^2} = 108\sqrt{3} + 324$$

$$\underline{\underline{S \cong 511,06 \text{ cm}^2}}$$

Objem hranolu vypočítáme:

$$V = S_p \cdot v = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2} \sqrt{u^2 - 4a^2} = 54\sqrt{3} \cdot 9 = 486\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{V \cong 841,78 \text{ cm}^3}}$$

3. Kolikrát se zvětší objem a povrch krychle, pokud se její hrana zvětší třikrát?

Řešení:

Objem původní krychle označíme V_0 , objem zvětšené krychle pak V_1 :

$$V_0 = a^3$$

$$V_1 = (3a)^3 = 27a^3$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{27a^3}{a^3} = 27$$

Objem se zvětší 27krát.

Povrch původní krychle označíme S_0 , Povrch zvětšené krychle pak S_1 :

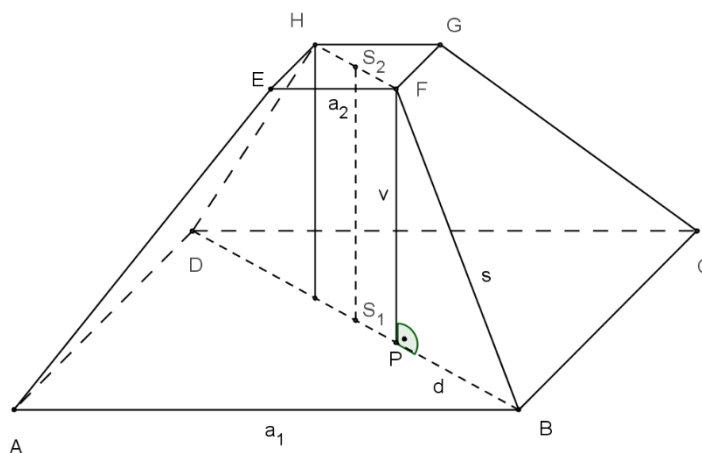
$$S_0 = 6a^2$$

$$S_1 = 6(3a)^2 = 6 \cdot 9a^2 = 54a^2$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{54a^2}{6a^2} = 9$$

Povrch se zvětší 9krát.

4. Vypočítejte objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, je-li délka hrany dolní podstavy $a_1 = 6$ cm, délka hrany horní podstavy $a_2 = 2$ cm a délka boční hrany komolého jehlanu je $s = 3$ cm.



Obr. 4

Označíme-li S_1 - obsah dolní podstavy a S_2 - obsah horní podstavy, objem komolého kužele se vypočítá podle vzorce:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot v$$

$$S_1 = a_1^2 = 6^2 = 36$$

$$S_2 = a_2^2 = 2^2 = 4$$

Výšku komolého jehlanu zjistíme z rovnoramenného lichoběžníku DBFH, jehož základny mají délku úhlopříček obou podstav.

$$u_1 = \sqrt{2a_1^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2a_2^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$$

V trojúhelníku PBF známe délku $s = 3\text{ cm}$ a d je polovina rozdílu úhlopříček podstav:

$$d = \frac{u_1 - u_2}{2} = \frac{(6 - 2)\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad s = 3\text{ cm}$$

$$v = \sqrt{s^2 - d^2} = \sqrt{9 - 8} = 1$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) \cdot v = \frac{1}{3} (36 + 4 + \sqrt{36 \cdot 4}) \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot (40 + \sqrt{144}) = \frac{52}{3} = 17, \bar{3}$$

$$V \cong 17,3\text{ cm}^3$$

Objem komolého jehlanu je přibližně $17,3\text{ cm}^3$.

Příklady k procvičování:

1. Pravidelný šestiboký jehlan má podstavnou hranu délky $a = \sqrt{3}\text{ cm}$ a pro odchylku α podstavné a boční hrany platí, že $\tan \alpha = 2$. Určete objem jehlanu.

$$[V = 2,25\text{ cm}^3]$$

2. Vypočítejte povrch krychle, je-li délka její tělesové úhlopříčky 21 cm .

$$[S = 882\text{ cm}^2]$$

3. Kvádr má objem $7,5\text{ dm}^3$. Jeho rozměry jsou v poměru $3:4:5$. Vypočítejte jeho povrch a tělesovou úhlopříčku.

$$[S = 2350\text{ cm}^2, u = 35,4\text{ cm}]$$

4. Pravidelný šestiboký hranol má tělesové úhlopříčky $u_1 = 15\text{ cm}$, $u_2 = 17\text{ cm}$. Vypočítejte délku jeho podstavné hrany, výšku, povrch a objem.

$$[a = 8\text{ cm}, v = 5,75\text{ cm}, S = 608,5\text{ cm}^2, V = 955,2\text{ cm}^3]$$

5. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm . Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 60° . Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.

$$[V = \frac{76}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^3, S = 92\text{ cm}^2]$$

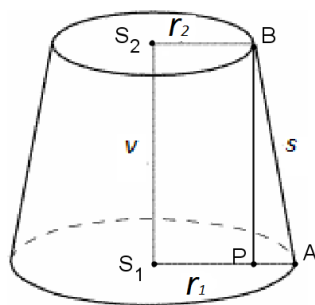
6. Je dána krychle A-H o hraně délky $a = 3\text{ cm}$. Určete povrch a objem tělesa A C H F a o jaké těleso se jedná.

$$[S = 31,2\text{ cm}^2, V = 9\text{ cm}, \text{pravidelný čtyřstěn}]$$

Válec a kužel

Řešené příklady:

1. Komolý rotační kužel má poloměry podstav a výšku v poměru 3 : 11 : 15 a povrch $S = 368\pi \text{ cm}^2$. Vypočítejte jeho objem.

Řešení:

Obr. 1

Díky známému poměru poloměrů a výšky můžeme zapsat:

$$r_2 = 3x$$

$$r_1 = 11x$$

$$v = 15x$$

Dále víme, že $S = 1472\pi \text{ cm}^2$.

Povrch rotačního komolého kužele se vypočítá:

$$S = \pi[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot s]$$

Abychom ze vzorce získali rovnici o jedné neznámé x , musíme si ještě vyjádřit s :

Z pravoúhlého trojúhelníku PAB, kde $|AB|=s$, $|PA|=r_1-r_2$ můžeme pomocí Pythagorovy věty vyjádřit:

$$s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2} = \sqrt{(11x - 3x)^2 + (15x)^2} = \sqrt{64x^2 + 225x^2} = \sqrt{289x^2} = 17x$$

Nyní už můžeme dosadit do vzorce pro obsah rotačního komolého kužele za $s = 17x$;

$$r_2 = 3x; r_1 = 11x; v = 15x:$$

$$S = \pi[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot s] = \pi[9x^2 + 121x^2 + (3x + 11x) \cdot 17x] = \pi \cdot 368x^2$$

Ze zadání známe povrch komolého kužele. Dostaneme tedy rovnici:

$$\pi \cdot 368x^2 = 1472\pi$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Protože pro x , by po dosazení vyšli záporné délky úseček, řešením je pouze $x = 2$.

Dosadíme tedy $x = 2$ a vypočítáme poloměry a výšku:

$$r_2 = 3x = 6$$

$$r_1 = 11x = 22$$

$$v = 15x = 30$$

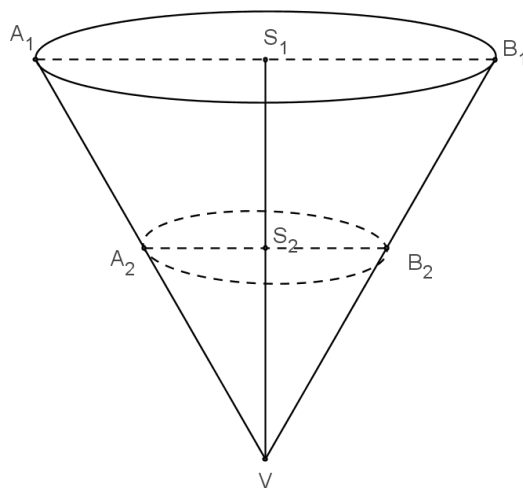
Nyní můžeme spočítat objem komolého kuželu:

$$V = \frac{\pi \cdot v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi \cdot 30}{3} (6^2 + 6 \cdot 22 + 22^2) = 10\pi \cdot 652 = 6520\pi$$

$$V \cong 20483,18 \text{ cm}^2$$

2. Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Vypočítejte obsah plochy smáčené vodou v případě, že do nálevky nalijete 3 litry vody.

Řešení:



Obr. 2

Trojúhelník $\triangle A_1 B_1 V \cong \triangle A_2 B_2 V$ (uu), část nálevky naplněná vodou je tedy opět rovnostranný kužel (viz obr 2).

Víme, že $|A_2 S_2| = r$

$$|A_2 V| = 2r$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle A_2 S_2 V$ pomocí Pythagorovy věty vypočítáme výšku kuželu

$$|S_2 V| = v = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$$

Nyní si vyjádříme objem kužele a následně dosadíme za $V=3\text{l}$:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{3} r = \frac{\pi \sqrt{3} r^3}{3} = 3$$

$$\frac{\pi \sqrt{3} r^3}{3} = 3$$

$$\pi \sqrt{3} r^3 = 9$$

$$r^3 = \frac{9}{\pi \sqrt{3}}$$

$$r^3 = \frac{\sqrt{27}}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{\pi}}$$

Obsah plochy smáčené vodou vypočítáme pomocí vzorce pro obsah pláště rotačního kužele:

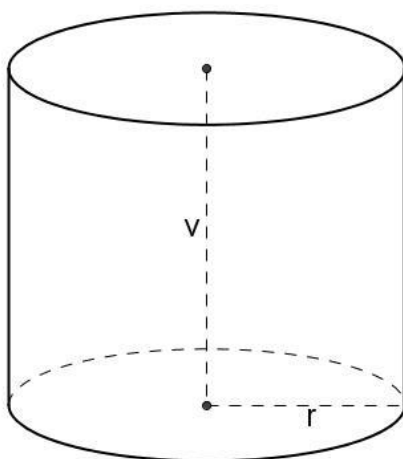
$$S_{pl} = \pi r s = \pi r 2r = 2\pi r^2 = 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{\pi}} \right)^2 = 2\pi \sqrt[3]{\frac{27}{\pi}} = 2\pi \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} = 6\pi^{1-\frac{2}{3}} = 6\pi^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt[3]{\pi}$$

$$S_{pl} = 6\sqrt[3]{\pi} \text{ dm}^2$$

Obsah plochy nálevky smočené vodou o objemu 3 litry je $6\sqrt[3]{\pi} \text{ dm}^2$.

3. Jaký průměr má 100 m dlouhý měděný drát, je-li jeho hmotnost 40 kg a hustota mědi je 8900 kg/m^3 ?

Řešení:



Obr. 3

Nejprve budeme muset určit objem drátu a poté vyjádříme průměr ze vzorce pro objem válce.

Objem válce vypočítáme ze vztahu:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{40}{8900} = \frac{2}{442}$$

$$V = \frac{2}{442} m^3$$

Pro objem válce platí:

$$V = \pi r^2 v = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 v$$

$$V = \pi \frac{d^2}{4} v$$

$$d^2 = \frac{4V}{\pi v}$$

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi v}}$$

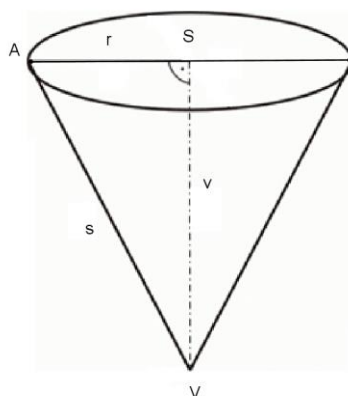
$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{2}{445}}{\pi \cdot 100}} = \sqrt{\frac{8}{445} \cdot \frac{1}{100 \pi}} = \sqrt{\frac{2}{11125 \pi}}$$

$$d \cong 0,007565 \text{ m}$$

$$d \cong 7,565 \text{ mm}$$

Měděný drát má průměr přibližně 7,565 mm.

4. Děti si mají vyrobit kornouty na sladkosti. Kornout má mít tvar kužele o výšce 40 cm a průměru 20 cm. Jaký jakou plochu a jaký tvar bude mít papír, který si děti na kornout vystřihnou (nebereme v úvahu překrytí – slepí jej izolepou). Jaký bude mít kornout objem?



Obr. 4

Řešení:

Kužel nebude mít podstavu (kornout nebude uzavřený), budeme tedy počítat pouze plochu pláště:

$$S_{pl} = \pi r s$$

Stranu kužele vypočítáme pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku AS (přitom

$$v = 40 \text{ cm}, r = \frac{d}{2} = 10 \text{ cm}) :$$

$$s^2 = r^2 + v^2$$

$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$$

$$S_{pl} = \pi r s = \pi 10 \sqrt{17} = \pi \cdot 100 \sqrt{17}$$

$$S_{pl} \cong 1295 \text{ cm}^2$$

Papír, který si na kornout děti vystřihnou, bude mít tvar kruhové výseče s poloměrem s a středovým úhlem α (viz obr. 5).

Víme, že $s = 10\sqrt{17} \text{ cm}$.

Označme O_K - obvod kružnice, O_V - obvod výseče.

Platí, že:

$$O_K = 2\pi r$$

$$O_V = 2\pi r$$

Velikost úhlu α vypočítáme z přímé úměry:

$$\frac{O_V}{O_K} = \frac{\alpha}{360}$$

$$\alpha = 360 \cdot \frac{O_V}{O_K}$$

$$\alpha = 360 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

$$\alpha = \frac{360 r}{s} = \frac{360 \cdot 10}{10\sqrt{17}} = \frac{360}{\sqrt{17}} = \frac{360\sqrt{17}}{17}$$

$$\alpha = 87^\circ 19'$$

Objem kornoutu vypočítáme ze vzorce pro objem kužele:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v = \frac{1}{3} \pi 10^2 \cdot 40 = \frac{4000 \pi}{3}$$

$$V \cong 4188,79 \text{ cm}^3$$

Papír, který děti na kornout vystříhnou, bude mít plochu 1295 cm^2 a tvar kruhové výseče s poloměrem $s = 10\sqrt{17} \text{ cm}$ a středovým úhlem $\alpha = 87^\circ 19'$. Jeho objem bude $4188,79 \text{ cm}^3$.

Příklady k procvičování:

1. Objem kužele je $V = 9\sqrt{3}\pi \text{ dm}^3$, odchylka strany kužele od roviny podstavy je $\alpha = 60^\circ$. Určete obsah pláště tohoto kužele.

$$[S = 18\pi \text{ dm}^2]$$

2. Vypočítejte poloměr podstavy a objem rotačního kužele, jestliže rozvinutý plášť je kruhová výseč s poloměrem 3 cm a středovým úhlem 120° .

$$[r = 1 \text{ cm}, V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3]$$

3. Komín tvaru dutého komolého rotačního kužele má výšku 32 m, dolní průměry 3,2 m a 2 m, horní průměry 1,7 m a 1,2 m. Jaká je jeho celková hmotnost, jestliže hustota zdiva je 1600 kg/m^3 ?

$$[m = 143,820 \text{ t}]$$

4. Komolý rotační kužel má podstavy o poloměrech $r_1 = 8 \text{ cm}$, $r_2 = 4 \text{ cm}$ a výšku $v = 5 \text{ cm}$. Jaký je objem kužele, z něhož komolý kužel vznikl?

$$[V = \frac{640\pi}{3} \text{ cm}^3]$$

5. Určete rozměry válcové nádoby o objemu 5 litrů, jestliže výška nádoby se rovná polovině průměru její podstavy.

$$[v = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \text{ dm}]$$

6. Rotační válec má povrch $S = 20\pi \text{ dm}^2$, úhlopříčka jeho osového řezu má délku $u = 5 \text{ dm}$. Určete jeho objem V.

$$[V_1 = 12\pi \text{ dm}^3, V_2 = 5\sqrt{5}\pi \text{ dm}^3]$$

Komolý jehlan a kužel

Řešené příklady

1. Vypočítejte povrch a objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, je-li hrana dolní podstavy 18 cm a hrana horní podstavy 9 cm. Stěnová výška je 9 cm.

Řešení:

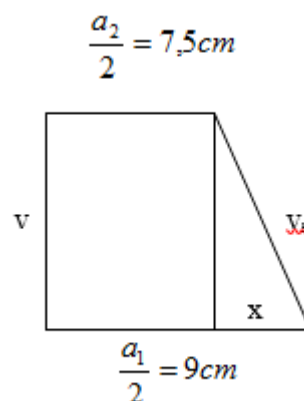
$$S = 4 \cdot \frac{18 + 9}{2} \cdot 9 + 18^2 + 9^2 = 1143 \text{ cm}^2$$

Pro výpočet objemu určíme z řezu výšku tělesa

$$x = 9 - 7,5 = 1,5$$

$$v = \sqrt{h^2 - x^2} = 8,875$$

Dosazením do vzorce pro objem $V = 2422,6 \text{ cm}^3$



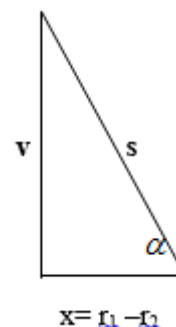
2. Vypočítejte objem a povrch komolého rotačního kužele, jsou-li poloměry podstav $r_1=8$ cm, $r_2=5$ cm a odchylka strany kužele od podstavy je $\alpha = 60^\circ$.

Řešení: $x = r_1 - r_2 = 3$ cm, $v = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$

$$\cos \alpha = \frac{3}{s} \dots s = \frac{3}{\cos 60^\circ} = 6 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi \cdot v}{3} (64 + 40 + 25) = \frac{\pi \cdot 3\sqrt{3}}{3} \cdot 129 = 701,9 \text{ cm}^3$$

$$S = \pi(64 + 25 + 13 \cdot 6) = \pi \cdot 167 = 524,65 \text{ cm}^2$$



Příklady k procvičování:

- Vypočítejte povrch komolého rotačního kužele, je-li jeho objem $V = 516 \text{ cm}^3$ a poloměry podstav $r_1=9,4$ cm, $r_2=4,2$ cm.
($S = 598 \text{ cm}^2$)
- Poloměry podstav komolého rotačního kužele jsou $r_1=8$ cm, $r_2=5$ cm, jeho objem je $V = 172\pi \text{ cm}^3$.
Určete jeho povrch.
($S = 438,8 \text{ cm}^2$)
- Poloměry podstav komolého rotačního kužele jsou $r_1=7$ cm, $r_2=3$ cm, jeho povrch je $S = 108\pi \text{ cm}^2$. Určete jeho objem,
($V = 248,2 \text{ cm}^3$)
- Povrch komolého rotačního kužele je $S = 7694 \text{ cm}^2$, průměry podstav jsou 56 cm a 42 cm.
Určete výšku kužele.
($v = 24 \text{ cm}$)

Koule a její části

Řešené příklady:

- Ze dvou koulí o poloměrech $r_1 = 4$ cm a $r_2 = 5$ cm je ulita nová koule. Určete její povrch.
Příklad řešte nejprve obecně.

Řešení:

Abychom mohli vypočítat povrch nové koule (podle vzorce $S = 4\pi r^2$), musíme zjistit její poloměr.

Objem nové koule je roven součtu objemů původních koulí (pro původní koule použijeme indexy 1, 2 a pro novou kouli pak index 3):

$$\begin{aligned} V_3 &= V_1 + V_2 \\ \frac{4}{3} \pi r_3^3 &= \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \frac{4}{3} \pi r_2^3 \\ \frac{4}{3} \pi r_3^3 &= \frac{4}{3} \pi (r_1^3 + r_2^3) \\ r_3^3 &= r_1^3 + r_2^3 \end{aligned}$$

$$r_3 = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}$$

Nyní poloměr nové koule dosadíme do vzorce pro obsah koule.

$$S_2 = 4\pi r_3^2$$

$$S_2 = 4\pi \left(\sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3} \right)^2$$

Vyřešili jsme tedy příklad obecně a posledním krokem bude dosadit do řešení za $r_1 = 4\text{ cm}$ a $r_2 = 5\text{ cm}$:

$$S_2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}\right)^2 = S_2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{4^3 + 5^3}\right)^2 = 4\pi\sqrt[3]{189^2}$$

$$S_7 \cong 413,86 \text{ cm}^2$$

Povrch nové koule ulité z původních dvou koulí je $413,86 \text{ cm}^2$.

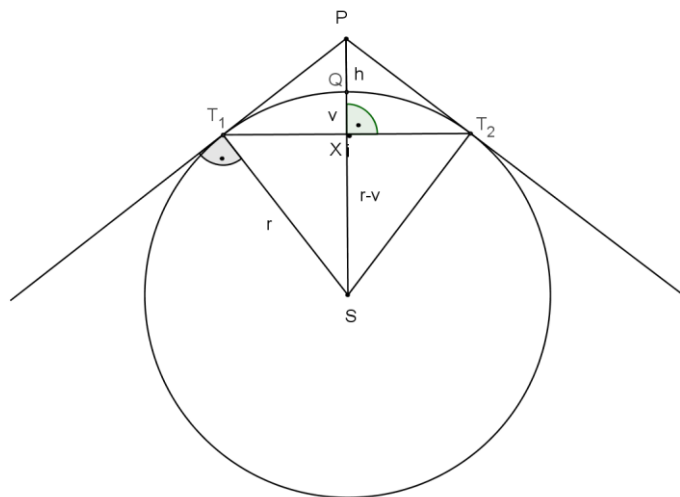
2. Jakou část zemského povrchu je vidět z výšky 400 km nad Zemí?

Řešení:

Viditelná část Země tvoří kulový vrchlík (obr. 1).

Abychom mohli vypočítať jeho povrch ($S = 2\pi r v$), musíme určiť jeho výšku. Tu určíme díky podobnosti trojúhelníků $\Delta SXT_1 \approx \Delta ST_1P$ (uu).

$$\frac{|ST_1|}{|SP|} = \frac{|SX|}{|ST_1|}$$



Obr. 1

Z obrázku vidíme, že platí:

$$|SP| = r + h$$

$$|SX| = r - v$$

$$|ST_1| = r$$

Dosadíme do výše uvedené rovnice a vyjádříme v :

$$\frac{r}{r+h} = \frac{r-v}{r} \quad \bigg/ \cdot r$$

$$\frac{r^2}{r+h} = r-v$$

$$v = r - \frac{r^2}{r+h}$$

$$v = \frac{r^2 + rh - r^2}{r+h}$$

$$v = \frac{rh}{r+h}$$

Nyní můžeme v dosadit do rovnice pro povrch:

$$S = 2\pi r v = 2\pi r \frac{rh}{r+h} = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$

$$S = \frac{2\pi \cdot 6378^2 \cdot 400}{6378 + 400}$$

$$(S \cong 15083680,51 \text{ km}^2)$$

Nyní víme, jaká plocha Země je vidět z výšky 400 metrů nad Zemí. Abychom určili, jaká část Země to je, musíme ještě určit celkovou plochu Země (označíme ji S_Z):

$$S_Z = 4\pi r^2$$

$$(S_Z \cong 4\pi \cdot 6378^2 \text{ km}^2 \cong 511185932,5 \text{ km}^2)$$

Kolik procent (p) zemského povrchu je vidět vypočítáme pomocí přímé úměry:

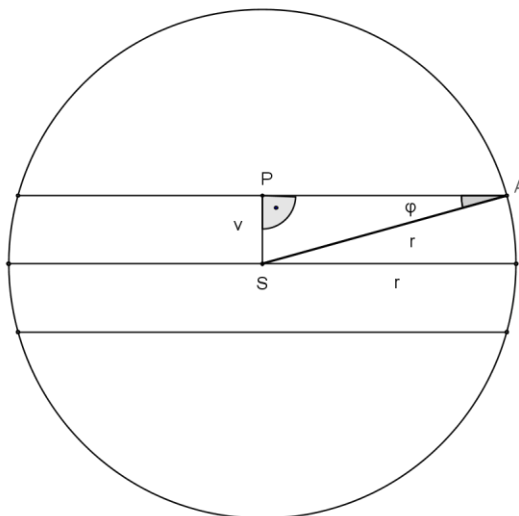
$$p = \frac{S}{S_Z} \cdot 100\% = \frac{\frac{2\pi r^2 h}{r+h}}{4\pi r^2} = \frac{h}{2(r+h)} \cdot 100\%$$

$$p \cong 2,95\%$$

Z výšky 400 km nad Zemí vidíme přibližně 2,95 % zemského povrchu.

3. Kolik procent zemského povrchu leží v oblasti tropického pásma (obratník $\varphi = 23^\circ 27'$).

Řešení:



Obr. 2

Označíme si povrch země ležící v tropickém pásmu jako S_T a ten se vypočítá jako dvojnásobek povrchu kulové vrstvy S_1 .

$$S_T = 2S_1$$

$$S_1 = 2\pi r v$$

Bude třeba ještě zjistit výšku kulové vrstvy v , a to z pravoúhlého trojúhelníku SAP (obr. 2):

$$\sin \varphi = \frac{v}{r}$$

$$v = r \cdot \sin \varphi$$

Nyní můžeme vyjádřit S_T :

$$S_T = 2S_1 = 2 \cdot 2\pi r v = 4\pi r \cdot r \cdot \sin \varphi = 4\pi r^2 \cdot \sin \varphi$$

$$S_Z = 4\pi r^2$$

$$p = \frac{S_T}{S_Z} \cdot 100\% = \frac{4\pi r^2 \cdot \sin \varphi}{4\pi r^2} 100\% = \sin \varphi \cdot 100\%$$

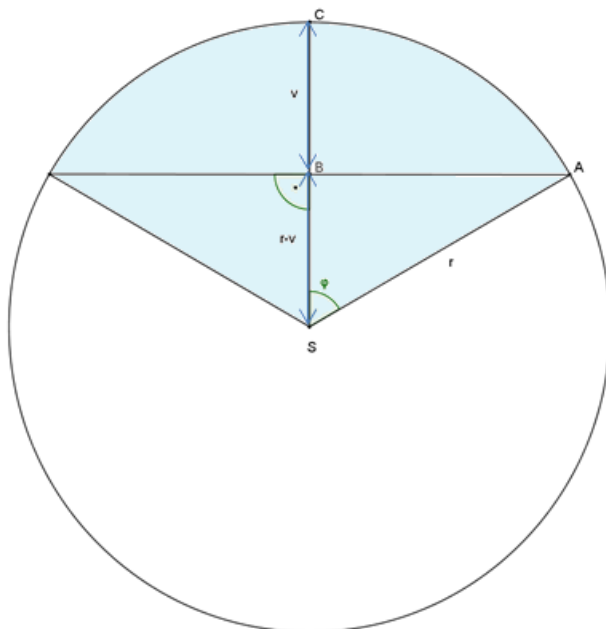
$$p = \sin 23^\circ 27' \cdot 100\%$$

$$p \cong 39,79\%$$

V oblasti tropického pásma leží přibližně 39,79 % zemského povrchu.

4. Objem kulové výseče je $V = 72\pi \text{ cm}^3$. Středový úhel jejího osového řezu je $2\varphi = 120^\circ$. Jak velký je poloměr r koule, z níž tato výseč vznikla?

Řešení:



Obr. 3

$$V = 72\pi \text{ cm}^3$$

$$2\varphi = 120^\circ$$

$$\underline{r = ? \text{ cm}}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$

Je třeba nejprve určit v , kterou vyjádříme z pravoúhlého trojúhelníku SAB (obr. 3):

$$\cos \varphi^\circ = \frac{r-v}{r}$$

$$r \cos \varphi = r - v$$

$$v = r - r \cos \varphi$$

$$v = r(1 - \cos \varphi)$$

$$v = r(1 - \cos 60^\circ)$$

$$v = \frac{r}{2}$$

Nyní dosadíme za v do vzorce pro objem, za V dosadíme hodnotu ze zadání a vypočítáme r :

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \frac{r}{2}$$

$$72\pi = \frac{\pi r^3}{3}$$

$$216 = r^3$$

$$r = \sqrt[3]{216}$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

Poloměr koule, z níž výseč vznikla, je 6 cm.

Příklady k procvičování:

1. Dutá kovová koule má vnější průměr $d = 4 \text{ dm}$. Určete její tloušťku, má-li hmotnost 25 kg a hustota kovu je $\rho = 8,45 \text{ g/cm}^3$.

$$[x \cong 6,07 \text{ mm}]$$

2. Objem kulové úseče je $V = 45\pi \text{ cm}^3$. Její výška je 3 cm. Určete povrch úseče.

$$[S = 36\pi \text{ cm}^2]$$

3. Kolik procent zemského povrchu leží

- a. v oblasti mírného pásma (obratník $\varphi = 23^\circ 27'$, polární kruh $\varphi = 66^\circ 33'$),
- b. v oblasti polárního pásma?

$$[\text{a) } 51,9\%, \text{ b) } 8,3\%]$$

4. Objem kulové výseče je roven $\frac{1}{4}$ objemu koule, z níž výseč vznikla. Určete povrch výseče, má-li poloměr koule velikost r .

$$[S = \frac{1}{2}\pi r^2(2 + \sqrt{3})]$$

5. Určete obsah kulového pásu a objem kulové vrstvy, jsou-li dány poloměry podstav $\rho_1 = 11,2 \text{ cm}$, $\rho_2 = 3,2 \text{ cm}$ a poloměr koule $r = 13 \text{ cm}$. Střed koule přitom neleží uvnitř vrstvy.

$$[S \cong 490,1 \text{ cm}^2, V \cong 1391,9 \text{ cm}^3]$$

6. Nádobu tvaru polokoule je naplněna vodou. Pokud ji nakloníme o 30° , vyteče z ní 5,5 litrů vody. Kolik litrů vody v nádobě zůstane?

$$[2,5 \text{ litru}]$$

7. Kouli je opsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. V jakém poměru jsou povrchy a objemy těchto těles?

$$[S_1:S_2:S_3 = V_1:V_2:V_3 = 4:6:9]$$