I. MNOHOČLENY, LINEÁRNÍ ROVNICE

1. OPAKOVÁNÍ O MNOHOČLENECH ZE ZÁKLADNÍ DEVÍTILETÉ ŠKOLY

1. Ve městě jsou domy s různým počtem bytových jednotek. Je-li v městě t domů s jedním bytem, p domů s dvěma byty, k s třemi byty, m se čtyřmi byty, v s pěti byty, s se šesti byty a dva domy s osmi byty, kolik je ve městě bytových jednotek?

2. Traktorista oral v katastru farmy A x dní po 10 hodinách a y dní po 9 hodinách a v katastru farmy B z dní po 8 hodinách a v dní po 11 hodinách. Kolik hodin mu zbývá ještě odpracovat, jestliže plán orby činí celkem m hodin?

3. Bednička s cukrem váží r kp, prázdná t kp. Kolik cukru je v n takových bedničkách? Jestliže se účtuje c Kčs za 1 kp cukru a d Kčs za dovoz všech n bedniček, na jakou částku zněl účet?

4. Malíř bílí místnost o délce a metrů, šířce b metrů a výšce c metrů. Jakou plochu vybílí, má-li místnost dvoje dveře o rozměrech x metrů a y metrů a jedno okno o rozměrech r metrů a s metrů?

5. Šířka obdélníka je $(3m + 2n)$ cm, délka o $(m - n)$ cm větší. Jak velký je obvod obdélníka?

6. Jak velký obvod má trojúhelník, má-li jedna jeho strana délku $(m + n)$ cm, druhá strana je o $(n - 5)$ cm kratší než prvá a třetí strana o $(2m + 5)$ cm delší než druhá?

7. Zpaměti: Uspořádejte sestupně tyto mnohočleny v proměnné c:
a) $3c^4 + 2c^2 - 4c^3 + 1 - c$;
b) $c^2 - 7c^4 + 4c - 15 + 5c^5 - 7c^3$;
c) $ac^6 - bc - c^4 + mc^2 - n$;
d) $pc^4 + qc - mc^2 + nc^3 + v + 1$.

8. Proveďte a výsledný mnohočlen v proměnné x uspořádejte sestupně nebo vzestupně:
a) $5x^3 - 3x^2 + 4x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$;
b) $2x - [3x^2 + (4x^3 - 2x + 1)]$;
c) $x^4 - \{3x^2y^2 - [2x^4 - (x^3y - y^4)]\}$;
d) $2x^3 - [2x^2 - (2x + 1)] - [x + (3x^3 - x)]$;
e) $15x^2 - \{-4x^2 + [5x - 8x^2 - (2x^2 - x) + 9x^2] - 3x - 1\}$.

9. Určete výrazy: a) $A + B - C$, b) $A - B + C$, c) $B - C - A$, je-li $A = 5a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$,
$B = a^4 + 3a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 2b^4$,
$C = -4a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 10ab^3 - 5b^4$.

10. Zpaměti: Jakou hodnotu má výraz $x^3 - 3x^2 + x + 1$ pro
a) $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = 2$, d) $x = -2$?

11. Jakou hodnotu má výraz $a^4 - a^3b + ab^2 - 1$ pro
a) $a = 1$, $b = 2$, b) $a = 2$, $b = 1$, c) $a = 1$, $b = -1$,
d) $a = -1$, $b = 1$?

12. K mnohočlenu $2n^3 - 3n^2 + 2n - 1$ stanovte mnohočlen opačný. Jaké hodnoty mají tyto mnohočleny pro a) $n = 3$, b) $n = -4$?

13. Jakou hodnotu má výraz $5abc - \{2a^2b - [3abc - (4ab^2 - a^2b)]\}$ pro $a = -2$, $b = -2$, $c = -4$?

14. Jakou hodnotu má výraz
$3x^2y - \{xyz - (2xyz - x^2z) - 4x^2z + [3x^2y - (4xyz - 5x^2z)]\}$
pro $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$?

15. Jakou hodnotu má výraz
$pqr - \{3p^2q - [4pqr + (2pq^2 - 3p^2q)]\}$ pro $p = 1$, $q = 1$, $r = -2$?

16. Přesvědčte se, že hodnota výrazu $x^2 + x + 11$ pro $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$ je prvočíslo.

17. Zpaměti: Přesvědčte se, že hodnota výrazu $x^2 + x + 5$ pro $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ je prvočíslo.

18. Proveďte:
a) $(x + y)x - (x - y)y - (x + y)y - (x - y)x$;
b) $a^2(b^2 - c^2) - b^2(c^2 + 1) + c^2(a^2 + b^2) + b^2(1 - a^2)$;
c) $4(x - y + z) - 2(x + y - z) - 3(-x - y - z)$;
d) $p(p + q - r) - q(p - q - r) + r(p - q + r)$;
e) $x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 - xy - y^2) - x(x^2 + 2y^2)$;
f)* $ab(c + d) - ac(b + d) + ad(b - c) + bc(a + d) - bd(a - c) + cd(a - b)$;
g) $4a(5b - 2a) - 4(7a^2 - 3ab) - 2a(3a - 3b)$;
h) $1{,}4x(0{,}5x - 0{,}3y) - 5(0{,}4y^2 - 4xy) + 0{,}2y(8y - 5x)$;
i) $r^3(r^2 + 3) + r^2(r^3 + r^2) - r^3(r + 1)$;
j) $x^3(x + y^3) - (xy)^3 + (2x^2)^3$;
k) $(a^2b^3)^2 + (2a^2)^2y^2 - (a^2y)^2 - a^4(b^6 + 1)$.

19. Proveďte:
a) $(a + 2m)(2a - m) - (a - 2m)(2a + m)$;
b) $(2y + 1)(2y + 3) + (2y + 3)(2y + 5) - 8(y + 1)(y + 2)$;
c) $(p^2 - pq + q^2)(p + q)$;
d) $(1{,}44p^2 + 0{,}6pq + 0{,}25q^2)(1{,}2p - 0{,}5q)$;
e) $(v^3 - v^2 + v - 1)(v + 1)$;
f) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$;

g) $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$;
h) $(x + 1)(x + 2)(1 - x) + x(x + 5)(x - 3)$;
i) $(2a - b)[a(4a + b) + b(a + b)]$;
j) $(2a^2 + 2a + 1)[(a + 1)(a - 1) + a(a + 2)]$;
k) $(u + v - t)(u + v) + (u + t - v)(u + t) + (v + t - u)(v + t)$;
l) $(m^2 + n^2 + r^2 - mn - mr - nr)(m + n + r)$.

20. Napište výraz ABC jako mnohočlen v proměnné x, je-li $A = x + 1$, $B = x^2 - 1$, $C = x^3 + 1$ a uspořádejte ho sestupně.

21. Jakou hodnotu má výraz $(x + 1)(x + 2) + (x + 3)(x + 4)$ pro $x = -0{,}4$?

22. Jakou hodnotu má výraz $(x + 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13)$ pro $x = 5{,}6$?

23. Oč se zvětší objem kvádru o rozměrech 1, 2, 3, zvětší-li se každý jeho rozměr o kladné číslo z? Správnost výsledku si ověřte třeba pro číslo $z = 4$.

24. Oč se zmenší obsah obdélníka o rozměrech a, b, zmenší-li se oba jeho rozměry o kladné číslo z? Ověřte si správnost výsledku třeba pro $a = 10$, $b = 8$, $z = 3$.

25. Dělte a proveďte zkoušku:
a) $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$, $x \neq -\frac{2}{3}$;
b) $(a^3 - b^3) : (a - b)$, $a \neq b$;
c) $(c^3 + c^2 - 11c - 15) : (c + 3)$, $c \neq -3$;
d) $(9y^4 + 26y^2 + 25) : (3y^2 - 2y + 5)$, $3y^2 - 2y + 5 \neq 0$;
e) $(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2)$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

26. Uspořádejte vhodným způsobem oba mnohočleny a potom dělte:
$(11p^3 - 32 + 19p^2 + 3p^4 - 28p) : (-4 + 3p)$, $p \neq \frac{4}{3}$.

27. Proveďte zpaměti:
a) $(p + a)^2$; b) $(m - n)^2$; c) $(2 + a)^2$; d) $(3 - b)^2$;
e) $(a - 4)^2$; f) $(3a - b)^2$; g) $(5u + v)^2$; h) $(a^2 - b)^2$; i) $(c^3 - 1)^2$;
j) $(x^2 + y^2)^2$; k) $(z^3 - u^3)^2$.

28. Proveďte:
a) $(1{,}2x^2y - 0{,}5x^3y^2)^2$; b) $(-2{,}5m^2n^3 - 0{,}2m^3n^2)^2$;
c) $(a^m + b^n)^2$, n, m jsou přirozená čísla; d) $(5x^3 - 2y^n)^2$, n je přirozené číslo.

29. Dokažte, že platí
$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$. Užijte tohoto vztahu k výpočtu hodnot a) $55^2 + 45^2$; b) $125^2 + 75^2$; c) $309^2 + 291^2$; d) $0{,}64^2 + 0{,}36^2$.

30. Dokažte platnost vztahu $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$. Užijte jej při výpočtu hodnot 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2.

31. Proveďte:
$(6x^2 - 5)^2 - (4x^2 - 7)^2 - 2x^2(2x + 3)(2x + 3)$.

32. Dokažte, že pro všechna čísla a, b, x, y platí:
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (bx - ay)^2$.

33. Přičteme-li k součinu dvou po sobě následujících celých čísel větší z nich, dostaneme druhou mocninu toho většího čísla. Dokažte to.

34. Dosadíme-li do výrazů $x = ab$, $y = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, $z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ za a, b libovolná lichá čísla, dostaneme tři celá čísla x, y, z, o nichž platí $z^2 = x^2 + y^2$. Dokažte si platnost tohoto vztahu. Zkuste zjistit x, y, z pro některá určitá čísla.

35. Proveďte:
a) $(a + b + c)^2$; b) $(a - b - c)^2$; c) $(3x^2 + 2xy - 3y^2)^2$;
d) $(1 + x^n - x^{2n})^2$, n přirozené číslo; e) $(a + b + c + d)^2$;
f) $(2m + 3k + 4p - 5q)^2$.

36. Proveďte:
a) $(3m + 3)^3$; b) $(4x^2 + 7)^3$; c) $(5a^2 + 3a)^3$; d) $(x^4 + x^2)^3$;
e) $(5a^2 - 6a^4)^3$; f) $(3x^2y - 5xy^3)^3$.

37. Proveďte:
a) $(2x - 1)^3 - (x - 2)^3$;
b) $(3x + y)^3 - (9x^2 + 6xy + y^2)(3x - y)$;
c) $(a + 2)^3 - 3(a + 2)^2(a + 1) + 3(a + 2)(a + 1)^2 - (a + 1)^3$.
(Návod: Dosaďte za $a + 2 = y$, za $a + 1 = x$.)

38. Proveďte:
a) $(a^2 - 1)^3 - (a^2 - 1)(a^2 + 1)^2 + 2a^2(a^2 - 2) + a^4(a^4 + 2)$;
b) $(2x - 1)^3 . (2x + 1)^3$;
c) $(a^2 - ab + b^2)^3 . (a + b)^3$.

***39.** Dokažte správnost vztahů:
a) $6(x + 1)^2 + 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 2(x + 1)^3 = 6x + 2$;
b) $5x(x - 3)^2 - 5(x - 1)^3 + 15(x^2 - 4) = 30x - 55$;
c) $(x + y)^3 + (x - y)^3 + 3(x + y)^2(x - y) + 3(x + y)(x - y)^2 = 8x^3$;
d) $(2ax - 3by)^3 + (3ax - 2by)^3 - 35(a^3x^3 - b^3y^3) + 100abxy(ax - by) = 10abxy(ax - by)$.

***40.** Proveďte:
a) $(x - 1)^6$; b) $(a^2 + 2)^6$; c) $(2x - 1)^6$.

41. Dětská stavebnice se skládá z krychle o hraně a cm, ze tří kvádrů o rozměrech a cm, b cm, b cm, z dalších tří kvádrů o rozměrech a cm, a cm,

b cm a z krychle o hraně b cm. Jak velký je její objem? Lze tuto stavebnici složit do krychlové krabice o hraně $(a + b)$? Načrtněte si obrázek. Jakou velikost má barevný papír, jímž jsou všechny části stavebnice polepeny?

***42.** Proveďte:

a) $(a + b)^2 - (a - b)^2 + (ab + 1)^2 - (ab - 1)^2$;
b) $[(p + 1)^2 - (p - 1)^2]^2$;
c) $[(2x^2 - 3y^3)^2 + (3x^2 + 2y^3)^2]^2$.

43. Dokažte, že platí:
a) $(a - b + c)^2 = (b - a - c)^2$;
b) $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc)$.

44. Který výraz je nutno přičíst k výrazu $(x + y)^2 + z^2$, aby vznikl výraz $(x + y - z)^2$?

45. O kolik se zvětší hodnota výrazu $(a + b + 1)^2$, zvětší-li se číslo a o 1?

46. Dokažte, že součin $(5r + 3a - 4b)(5r - 3a + 4b)$ je čtverec, je-li $r^2 = a^2 + b^2$.

47. Určete výraz $x^2 - y^2 - z^2$, je-li $x = m + n - p$, $y = m - p$, $z = m - n$.

48. Dokažte, že pro všechna čísla a, b platí:
$(a^2 + ab + b^2)^2 + (a^2 - ab + b^2)^2 + (a^2 + ab - b^2)^2 + (a^2 - ab - b^2)^2 = 4(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

***49.** Zjednodušte:
$$\frac{1}{4}\{(a + b - c - 1)^2 + (a - b + c - 1)^2 + (-a + b + c - 1)^2 + (a + b + c + 1)^2\}.$$

50. Pro která čísla x, y je hodnota výrazu $(4x - 3y)^2 + (5x + 10)^2$ rovna nule?

2. ROZKLAD MNOHOČLENŮ V SOUČIN

51. Rozložte v součin činitelů výrazy:

a) $2mp - 2mq$;
b) $2aby - 10acy + 8bcy$;
c) $7u^3vx + 14u^2v^2x^2 - 21ux^4$;
d) $p^3q^2r + pq^3r^2 + pq^2r$;
e) $x^3y^2 + x^2y^3 + x^2y^2$;
f) $x(a + b)^2 + x^2(a + b)$;
g) $3v^2(v - r)^3 + 6v^3(v - r)^2$;
h) $ax^5 - 2a^2x^4 + a^3x^3$;
i) $8b^2 - 18c^2$;
j) $9a^2 - (a - b)^2$;
k) $9p^4(a - b) - 25q^2(a - b)$;
l) $9x^2 - 6xy + y^2 - z^2$;
m) $m^2 - n^2 - p^2 + 2np$;
n) $(a - b)x^4 + (b - a)x^2$;
o) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$;
p) $(u + 3v)^2 - 9(v - q)^2$;
r) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$;
s) $(4p + 3q)^2 - 16(p - q)^2$;
t) $48(a + b)^2 - 12(a - b)^2$;
u) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$;
v) $a(p - q + 1)(ax^2 + b) + b(p - q + 1)(bx^2 - a) + 2abx^2(p - q + 1)$.

52. a) $2a^5 - 2a$;
b) $2a^4 - 32$;
c) $(r + s)^4 - r^4$;
d) $ac + nad + bc + nbd$;
e) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$;
f) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$;
g) $m^3 - m^2n - mn^2 + n^3$;
h) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$;
i) $p^2y^2 - 4p^2 - y^2 + 4$;
j) $2k^4 - k^3 + k - 2$;
k) $a^2y - aby + a^3y - ab^2y$;
l) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$;
m) $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 2y + 1$
[návod: $y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$];
n) $2h^2 + h - 1$
[návod: $2h^2 = h^2 + h^2$];
o) $2a^5 + 6a^4 + 6a^3 + 2a^2$;
p) $27r^4 - r$;
q) $2a^2x^4 + 16a^2x$;
r) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;
s) $x^4 + x^3 + x + 1$;
t) $m^5 + m^3 - m^2 - 1$;
u) $y^3 - 3y^2 + 4$
[návod: $4 = 3 + 1$].

***53.** a) $a^3 + 3a^2 + 4a + 2$
[návod: $a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = (a^3 + 2a^2 + 2a) + (a^2 + 2a + 2)$];
b) $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2$
[návod: $2b^4 + b^3 + 4b^2 + b + 2 = (b^3 + b) + (2b^4 + 4b^2 + 2)$].

54. Rozložte v součin trojčlen $x^2 + 10x + 24$.

Řešení A

$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 4x + 6x + 24 = x(x + 4) + 6(x + 4) = (x + 4)(x + 6)$.

Řešení B

Předpokládejme, že lze provést rozklad uvedeného trojčlenu takto: $x^2 + 10x + 24 = (x + a)(x + b)$, kde a, b jsou celá čísla. Jelikož $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, je zřejmé, že hledáme taková dvě celá čísla a, b, aby platilo $a + b = 10$, $ab = 24$.

Přihlédneme-li k součinu těchto čísel, pak tu připadají v úvahu jen tyto dvojice: (24; 1), (12; 2), (8; 3), (6; 4), (−24; −1), (−12; −2), (−8; −3), (−6; −4). Součet 10 však má jedině dvojice (6; 4). Je tedy $a = 6$, $b = 4$.
Závěr: $x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$.

55. Rozložte kvadratické trojčleny v součin lineárních dvojčlenů:
a) $x^2 - 10x + 24$; b) $x^2 + 3x - 10$; c) $x^2 + x - 6$;
d) $x^2 - x - 6$; e) $x^2 - x - 110$; f) $x^2 + 18x + 81$;
g) $x^2 + 24x + 143$; h) $x^2 + 2x - 143$; i) $x^2 - 2x - 143$;
j) $x^2 + 17x + 72$; k) $x^2 - x - 72$; l) $x^2 + 27x + 72$;
m) $x^2 - 21x - 72$; n) $x^2 - 8x - 48$; o) $x^2 + 15x + 36$.
Abyste se přesvědčili, že rozklad je správný, proveďte násobení dvojčlenů, které rozklad obsahuje.

56. Rozložte v součin trojčleny:
a) $x^3 + x^2 - 42x$; b) $x^4 - 9x^3 - 10x^2$; c) $x^5 + x^4 - 56x^3$;
d) $x^4 + 2x^2 - 3$; e) $x^4 + 11x^2 + 24$; f) $y^4 - 13y^2 + 40$;
g) $a^5 + 3a^3 - 4a$; h) $4x^2 - 8x + 3$
[návod: $4x^2 - 8x + 3 = (2x)^2 - 4\,.\,(2x) + 3$];
i) $9a^2 - 9a + 2$; j) $4b^2 - 14b + 10$.

57. a) $3a^2 + 5a - 2$
[návod: $5a = 6a - a$];
b) $2y^2 + 3y + 1$
[návod: $3y = 2y + y$];
c) $6x^4 - 13x^2 + 6$
[návod: $-13x^2 = -4x^2 - 9x^2$];
d) $4a^2 - 3a - 1$; e) $2y^4 + y^2 - 1$; f) $6p^2 + p - 1$;
g) $6a^2 - 7a - 5$; h) $10x^2 - 13x - 3$.

***58.** a) $x^2 + (a - 3)x + 2(1 - a)$;
b) $x^2 - (a + 2)x + (1 + a)$.

59. Rozložte v součin činitelů výraz
$V = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Řešení

Rozložme nejprve v součin výraz $U = (x - y)^3 + (y - z)^3$.
$U = (x - y + y - z)\,.\,[(x - y)^2 - (x - y)(y - z) + (y - z)^2] =$
$= (x - z)(x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 + xz - yz + y^2 - 2yz + z^2) =$
$= (x - z)(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + xz - 3yz)$.
Potom
$V = U + (z - x)^3 = U - (x - z)^3 = U - (x - z)(x - z)^2 =$
$= (x - z)(x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy + xz - 3yz - x^2 + 2xz - z^2) =$
$= (x - z)(3y^2 - 3xy + 3xz - 3yz) =$
$= 3(x - z)\,.\,[y(y - x) - z(y - x)] = 3(x - z)(y - x)(y - z) =$
$= 3(x - y)(y - z)(z - x)$.
Závěr: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

***60.** Rozložte v součin činitelů výraz:
a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

b) $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$;
c) $[(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) + 4abpq]^2 - 4[pq(a^2 + b^2) + ab(p^2 + q^2)]^2$.
[Návod: Užijte k rozkladu vzorce $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.]

61. Dokažte, že pro všechna čísla a, b, c platí:
$bc(c - b) + ac(a - c) + ab(b - a) = (a - b)(b - c)(c - a)$.

***62.** Rozložte v součin činitelů výraz
$V = a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3$.

***63.** Dokažte, že pro všechna čísla a, b, c, x, y, z platí:
$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 =$
$= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

64. Platí-li o číslech a, b, c vztah $a + b + c = 0$, platí též vztah $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Dokažte to.

Řešení

$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 +$
$+ 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) +$
$+ 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) =$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 +$
$+ 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b +$
$+ c)(c + a)$. Jelikož platí vztah $a + b + c = 0$, je $a + b = -c$, $a + c = -b$, $b + c = -a$.
Zřejmě platí též $0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, odkud je
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc\,.$$
Závěr: Je-li $a + b + c = 0$, platí o číslech a, b, c vztah $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

65. Dokažte, že pro všechna čísla a, b, c je hodnota výrazu
$V = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + b + c) + 3$ nezáporné číslo.
[Návod: Upravte výraz V na tvar: $V = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2$.]

***66.** Je dán výraz $V = (x + y)^2(x - y) + (y + z)^2(y - z) + (z + x)^2(z - x)$. Rozložte ho v součin a zdůvodněte, že výraz $V \neq 0$ tehdy, jsou-li čísla x, y, z navzájem různá.

67. Najděte všechny dělitele výrazů:
a) $6a$; b) $5pq$; c) $2a^2b$; d) $x^2 - xy$; e) $a^3 + 2a^2 + a$; f) $81x^4 - 16y^4$.

68. Určete největší společný dělitel výrazů:
a) $2a^5b^3x^2$; $8a^4b^4x^2y^2$; b) $a^2 + 2a + 1$; $a^2 - 1$;
c) $a^3b + 3a^2b$; $a^2b - 9b$; d) $p^4 - 1$; $p^3 - p^2 + p - 1$;
e) $m^2 - n^2$; $(m - n)^2$; $m^2 - mn$; f) $a^2 + 3a$; $a^2 - 9$; $(a^2 - 5a)(a + 3)$;
g) $(b + 5)^2$; $b^2 - 25$; $b^2 + 5b - 3bx - 15x$;
h) $a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$; $a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$;
i) $8a^3 - 1$; $6a - 3$; $2a^2 + a - 1$;

j) $u^3 + v^3$; $u^4 + u^2v^2 + v^4$
[návod: $u^2v^2 = 2u^2v^2 - u^2v^2$];
k) $q^3 + 1$; $q^4 + q^2 + 1$; $q^4 \quad q^3 + q - 1$
[návod: $q^2 = 2q^2 - q^2$];
l) $x^2 - 4x + 3$; $x^2 - 2x - 3$;
m) $a^2 - a - 2$; $a^2 - 4$; $a^2 - 5a + 6$;
n) $y^2 - 11y + 28$; $y^2 - 2y - 8$; $y^2 - 3y - 4$.
Úlohy a) — g) řešte zpaměti.

69. Určete nejmenší společný násobek výrazů [a)—d) zpaměti]:
a) $a^5b^3x^4$; $a^5b^4x^5$;
b) $abx + ab$; $ax^2 - a$; $bx - b$;
c) $y^2 - y$; $y^3 + y^2$; $(y - 1)^2$; $(y^2 - 1)^2$;
d) $p^2 - 2pq$; $p^2 - q^2$; $px + qx$;
e) $ac + ad + bd + bc$; $ac - ad - bc + bd$; $ac - ad + bc - bd$;
*f) $r^2 - 4rs - 12s^2$; $r^2 - rs - 6s^2$;
g) $4 - x^2$; $8 - x^3$;
h) $a + 1$; $a^3 + 1$; $a^4 - 1$;
i) $x^2 + 3x + 2$; $x^2 - 2x - 3$;
j) $x^2 - 10x + 16$; $x^3 - 10x^2 + 16x$; $x^2 - 5x - 24$.

70. Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek výrazů:
a) $x^2 - y^2$; $x^4 - y^4$; $x^6 - y^6$;
b) $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^2 - 1$;
c) $a(2a + 3b) - 3b(2a + 3b)$; $4a^2 + 12ab + 9b^2$;
d) $2x^3 - 2xy^2 + x^2 + xy$; $4x^4 + 4xy^3$;
e) $a^3 + 4a^2b + 4ab^2$; $a^3 - 4ab^2$; $3a^3 + 6a^2b$;
f) $4x^3y^2 - 8x^2y^3$; $2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3$; $2x^4y - 16xy^4$;
g) $m + 1$; $m^2 - 1$; $m^2 - 2m + 1$;
h) $3x^2 + 3x$; $5x^2 - 5x$; $10x^2 + 10x$;
i) $x^5 + x^3$; $x^5 + x$; $x^5 - x$;
j) $x^3 + y^3$; $x^3 - x^2y + xy^2$; $x^3 + x^2y$;
k) $ac + bc + ad + bd$; $ae + be + af + bf$; $ce + de + cf + df$;
l) $x^2 + 4x - 45$; $2x^2 - 9x - 5$;
m) $x^2 - 4$; $x^2 + x - 2$; $x^2 + 3x + 2$.

71. Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek mnohočlenů $M = (x^2 - y^2)(x^3 - x^2 - x - 2)$, $N = (x - y)(x^4 - 3x^2 - 4)$.

***72.** Napište dva mnohočleny třetího stupně v proměnné z, je-li jejich největší společný dělitel $D = z^2 + 2z - 3$ a nejmenší společný násobek $n = z^4 - 10z^2 + 9$.

73. Určete dvojím způsobem podíl následujících výrazů (pomocí rozkladu dělence v součin i dělením mnohočlenu mnohočlenem):
a) $(m^2 - 2m - 15) : (m - 5)$, $m \neq 5$;

b) $(z^2 + 7z + 12) : (z + 4)$, $z \neq -4$;
c) $(2x^2 + 5x - 12) : (2x - 3)$, $x \neq \dfrac{3}{2}$;
d) $(xy - 7x + 2y - 14) : (x + 2)$, $x \neq -2$;
e) $(15 - 9a + 5a^2 - 3a^3) : (5 - 3a)$, $a \neq \dfrac{5}{3}$;
f) $(6n^2 + 5n - 6) : (2n + 3)$, $n \neq -\dfrac{3}{2}$.

74. Rozkladem dělence i dělitele v součin určete podíl výrazů:
a) $(9a^4 - 13a^2 + 4) : (3a^2 + 5a + 2)$, $a \neq -1$, $a \neq -\dfrac{2}{3}$;
b) $(m^5 - m^4n + m^3n^2 - m^2n^3) : (m^3 + mn^2)$, $m \neq 0$.

***75.** Určete u tak, aby podíl těchto výrazů měl nulový zbytek:
a) $(a^3 + u) : (a + 4)$, $a \neq -4$;
b) $(x^3 + 9x^2 + 19x + u) : (x - 3)$, $x \neq 3$;
c) $(z^3 + 9z^2 + 18z + u) : (z - 4)$, $z \neq 4$.

76. Dělte výrazy $x^4 - 1$, $x^5 - 1$, $x^6 - 1$ výrazem $(x - 1)$, $x \neq 1$. Ze srovnání vzniklých podílů usuďte, jaký podíl dostanete, provedete-li dělení $(x^n - 1) : (x - 1)$, kde n je libovolné přirozené číslo.

77. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí:
$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1)$.
[Návod: Proveďte naznačené násobení na pravé straně uvedené rovnice.]

78. Dokažte, že platí:
$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - x^{n-4} + \ldots + 1)$, je-li n číslo liché. Dokažte též pro $n = 3$ a $n = 5$.

79. Dokažte, že výraz $x^5 - 10x^4 + 10x - 1$ je dělitelný výrazem $(x - 1)$.

80. Dokažte, že výraz $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ je dělitelný výrazem $(x - 1)$, pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

3. ZLOMKY

81. Rotor elektromotoru se otočí za t vteřin n-krát. Kolikrát se otočí za hodinu?

***82.** Vlak dlouhý x metrů jede po mostě dlouhém y metrů rychlostí c metrů za minutu. Kolik minut uplyne mezi okamžikem, kdy vjede lokomotiva na most, a okamžikem, kdy poslední vagón most opustí? Načrtněte si obrázek.

***83.** Ze dvou druhů zboží byla vyrobena směs. Prvého druhu bylo vzato h kg, druhého k kg. Jakou cenu měl 1 kg směsi, jestliže 1 kg zboží prvého druhu stál x Kčs, kdežto 1 kg zboží druhého byl o y Kčs levnější?

***84.** Traktorista oral v katastru jedné farmy x dní po deseti hodinách a y dní po osmi hodinách. Jestliže zoral takto m hektarů polí, kolik hektarů zoral průměrně za jednu hodinu? Proveďte též pro $m = 50$, $x = 6$, $y = 5$.

85. Dvě ozubená kola zapadají do sebe. Prvé kolo má y zubů, druhé $(y + 30)$ zubů. Kolikrát se otočí prvé kolo, otočí-li se druhé n-krát? Proveďte též pro $n = 42$, $y = 35$.

86. Určete hodnotu zlomku $\dfrac{x+y}{x-y}$ pro a) $x = 4\dfrac{3}{4}$, $y = 5\dfrac{5}{8}$; b) $x = 3\dfrac{5}{6}$, $y = \dfrac{3}{8}$.

87. Určete hodnotu zlomku $\dfrac{a^2-4}{a+2}$ pro a) $a = 0{,}6$; b) $a = 0{,}5$; c) $a = -4$.

88. Určete hodnotu zlomku $\dfrac{a^2-4}{c(a+2)-(a+2)}$ pro $a = 3$, $c = -\dfrac{3}{4}$.

89. Pro která čísla x mají smysl zlomky:

a) $\dfrac{1-x}{x}$; b) $\dfrac{1}{1-x}$; c) $\dfrac{x+y}{x-y}$; d) $\dfrac{2}{x^2-2x}$; e) $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}$;

f) $\dfrac{x}{x^2+5x+6}$; g) $\dfrac{2x+1}{x^3+x^2+x+1}$; h) $\dfrac{x^2+1}{x^2+(m-n)x-mn}$.

90. Odůvodněte správnost úprav (zpaměti):

a) $\dfrac{a-2}{b-4} = \dfrac{2-a}{4-b} = -\dfrac{a-2}{4-b} = -\dfrac{2-a}{b-4}$, $b \neq 4$;

b) $\dfrac{a}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{a}{(a-x)(b-x)} = -\dfrac{a}{(a-x)(x-b)} =$
$= \dfrac{-a}{(x-a)(b-x)}$, $x \neq a$, $x \neq b$.

91. Rozšiřte zlomky $\dfrac{a+b}{ab}$, $\dfrac{a-b}{ab}$, $\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}$ číslem $(a-b)$.

Pro která čísla a, b budou mít zlomky smysl?

92. Rozšiřte zlomky $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{p+1}$, $\dfrac{1}{p-1}$, $\dfrac{p^2-p+1}{p+1}$, $\dfrac{(p+1)^2}{p}$, $\dfrac{(p^2+1)(p-1)}{p+1}$ číslem $(p+1)$. Pro která čísla p budou mít zlomky smysl?

93. Napište výrazy x, $x^2 - 1$, $x^2 + 1$ jako zlomky se jmenovatelem $(x^2 + 1)$. Pro která čísla x mají tyto zlomky smysl?

94. Které číslo je nutno dosadit za x, má-li mít zlomek $\dfrac{x}{20}$ hodnotu $\dfrac{3}{4}$? Je tu možno využít pravidla o rozšiřování zlomků?

95. Srovnejte sestupně podle velikosti zlomky $\dfrac{n}{2}$, $\dfrac{2n}{5}$, $\dfrac{3n}{8}$, $\dfrac{7n}{10}$, $\dfrac{19n}{20}$, je-li a) $n > 0$; b) $n < 0$.

96. Srovnejte vzestupně podle velikosti zlomky $\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{3}{2r}$, $\dfrac{4}{3r}$, $\dfrac{5}{6r}$, $\dfrac{1}{5r}$, je-li a) $r > 0$; b) $r < 0$.

97. Je dán zlomek $z = \dfrac{a^3-2a^2-a+2}{a^3+2a^2-a-2}$. a) Rozhodněte, pro která čísla a má zlomek smysl. b) Pro která čísla a má zlomek z hodnotu rovnou nule? c) Zdůvodněte, že zlomek z má hodnotu kladnou pro všechna čísla $a > 2$.

Řešení

a) $a^3 + 2a^2 - a - 2 = a^2(a+2) - (a+2) = (a+2)(a^2-1) =$
$= (a+2)(a+1)(a-1)$.

Z rozkladu je patrno, že zlomek z má smysl pro všechna čísla $a \neq -2$, $a \neq -1$, $a \neq 1$.

$$z = \frac{a^3-2a^2-a+2}{(a+2)(a+1)(a-1)} = \frac{a^2(a-2)-(a-2)}{(a+2)(a+1)(a-1)} =$$
$$= \frac{(a-2)(a^2-1)}{(a+2)(a^2-1)} = \frac{a-2}{a+2}.$$

b) Zlomek má hodnotu rovnou nule, jestliže při nenulovém jmenovateli je jeho čitatel rovný nule. Tato podmínka je v našem případě splněna jen pro číslo $a = 2$.

c) Pro všechna čísla $a > 2$ má čitatel i jmenovatel zlomku z hodnotu kladnou.

Závěr: Zlomek z má smysl pro všechny hodnoty $a \neq -2$, $a \neq -1$, $a \neq 1$; po zkrácení má tvar $z = \dfrac{a-2}{a+2}$. Nulové hodnoty nabývá jen pro číslo $a = 2$; pro čísla $a > 2$ má hodnotu kladnou.

98. Zkraťte následující zlomky za předpokladu, že jejich jmenovatele nemají nulovou hodnotu [a) — c) zpaměti]:

a) $\dfrac{72abx}{84aby}$; b) $\dfrac{a^2 - ab}{ab - b^2}$; c) $\dfrac{y+1}{n+ny}$; d) $\dfrac{x^2-1}{xs-s}$; e) $\dfrac{p^2-2pq+q^2}{p^2-q^2}$;

f) $\dfrac{4a^2-1}{4a^2-4a+1}$; g) $\dfrac{9z^2-12z+4}{3z-2}$; h) $\dfrac{16-8a+a^2}{ab-4b}$;

i) $\dfrac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2+2ac+c^2-b^2}$; j) $\dfrac{p^2-4}{pq+2q-p-2}$;

k) $\dfrac{ab+2b-ac-2c}{ab-2b-ac+2c}$; l) $\dfrac{xy-y-x^2+x}{xy+y-x^2-x}$; m) $\dfrac{3uv+9v-2u-6}{3uv-2u-9v+6}$;

n) $\dfrac{a^2+2a-15}{3a+15}$; o) $\dfrac{r^2-4}{r^2+5r+6}$; p) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$;

q) $\dfrac{a^2-a-20}{a^2+a-30}$; *r) $\dfrac{3x^2+x-10}{4x^2+x-14}$; s) $\dfrac{a^3-1}{a^2-1}$; t) $\dfrac{x^3+x^2y+xy^2}{x^3y-y^4}$.

99. Dokažte správnost vztahu:

a) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by} = \dfrac{x+c}{2x+y}$, $a+b \neq 0$, $2x+y \neq 0$;

b) $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3} = \dfrac{x+z}{(1-y)^2}$, $y \neq 1$.

***100.** Dokažte, že platí

$$\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5} = \frac{1}{3a^2-b^2}, \quad a-2b \neq 0,\ 3a^2+b^2 \neq 0,\ 3a^2-b^2 \neq 0.$$

101. Uveďte zlomek $\dfrac{a+1}{(a+1)^2}$ na zlomek o jmenovateli (a^2-1).

102. Uveďte zlomek $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ na zlomek o jmenovateli $(x+1)^3$.

***103.** Je dán zlomek $z = \dfrac{x^2+2ax+a^2-16}{ax-4x+a^2-16}$.

Vyšetřete, kdy tento zlomek nemá smysl a potom zlomek zkraťte.

104. Proveďte:

a) $\dfrac{3a+2}{2} - \dfrac{a+6}{2} + 5$;

b) $\dfrac{d-1}{2} + \dfrac{3d-1}{4} - \dfrac{5d-1}{6}$;

c) $\dfrac{(x+y)^2}{6} + \dfrac{(x-y)^2}{12} - \dfrac{x^2+y^2}{4}$.

105. Proveďte a potom udejte podmínky, za kterých mají dané výrazy smysl.

a) $\dfrac{2m-n}{m-n} + \dfrac{m}{n-m}$; b) $\dfrac{x-y}{xy} - \dfrac{z-y}{yz} + \dfrac{x+z}{xz}$;

c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1-a}{a^2} + \dfrac{1-a^2}{a^3} - \dfrac{1-a^3}{a^4} + \dfrac{1-a^4}{a^5}$;

d) $\dfrac{u^2+1}{u+1} - u$; e) $\dfrac{4mn}{m-n} + (m-n)$; f) $1 - \dfrac{2p}{q} + \dfrac{p^2}{q^2} - \dfrac{(q-p)^2}{q^2}$;

g) $\dfrac{2p+q}{p^2+pq} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+q}$; h) $\dfrac{a-2b}{a+b} - \dfrac{2a-b}{b-a} - \dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$;

i) $\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x} - \dfrac{x(4-x)}{1-x^2}$;

j) $\dfrac{2p-3q}{2p+3q} - \dfrac{2p+3q}{2p-3q} + \dfrac{2(4p^2+9q^2)}{4p^2-9q^2}$;

k) $\dfrac{7v-1}{2v^2+6v} + \dfrac{5-3v}{v^2-9}$; l) $\dfrac{4}{3m-3n} - \dfrac{3m-4n}{2m^2-4mn+2n^2}$;

m) $\dfrac{2a-1}{2a} - \dfrac{2a}{2a-1} - \dfrac{1}{2a-4a^2}$.

106. Proveďte: $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{a-1}{a+1} - \dfrac{4a}{a^2-1} - 1$. Pro které hodnoty čísla a nemá tento výraz smysl? Jakou hodnotu má pro $a = 0$?

107. Proveďte: $a + 1 + \dfrac{a-1}{a^2-a+1}$. Ukažte, že výraz má smysl pro všechna čísla a.

$\left[\text{Návod: } a^2 - a + 1 = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}.\right]$

108. Proveďte: $\dfrac{1}{x^2-2x+1} + \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+2x+1}$. Jakou hodnotu má tento výraz pro a) $x = 2$; b) $x = -2$? Pro které hodnoty x nemá výraz smysl?

109. Proveďte: $\dfrac{1}{x^2 - 3x - 10} + \dfrac{1}{x^2 + x - 2} - \dfrac{2}{x^2 - 6x + 5}$.

Udejte všechna čísla x, pro která nemá výraz smysl.

110. Oč je větší výraz $x + \dfrac{1}{x}$ než výraz $\dfrac{x+1}{x}$ pro $x \geqq 1$? Ověřte si výsledek pro $x = 1, x = \dfrac{3}{2}, x = 3$.

***111.** Dokažte, že platí:

$$\frac{1}{a(a-c)(a-b)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}, \text{ jestliže}$$

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a \neq b, b \neq c, c \neq a$.

***112.** Dokažte, že platí:

a) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)} - \dfrac{1}{(b-c)(a-c)} - \dfrac{1}{(c-a)(b-a)} = 0$,

jestliže $a \neq b, b \neq c, c \neq a$;

b) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$,

$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$;

c) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$,

$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$;

d) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$,

$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$.

113. Trať kanoistického závodu je dlouhá d km a závodníci ji musí projet jednou po proudu a podruhé proti proudu. Je-li rychlost kánoe v klidné vodě $v_1$km/h a rychlost proudu $v_2$km/h, za jakou dobu projede závodník tratí oběma směry? Byl by závodník dřív či později u cíle, kdyby jel stejně dlouhý závod se stejným výkonem v klidné vodě? Jaký by byl časový rozdíl?

Řešení

Rychlost kánoe po proudu je $(v_1 + v_2)$ km/h, proti proudu $(v_1 - v_2)$ km/h, přičemž se předpokládá, že $v_1 > v_2$, aby úloha měla řešení.

Dráhu d projede závodník po proudu za dobu $t_1 = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$, proti proudu za dobu $t_2 = \dfrac{d}{v_1 - v_2}$ (t_1, t_2 v hodinách).

Dráhu d v obou směrech projede tedy za dobu $t = \dfrac{d}{v_1 + v_2} + \dfrac{d}{v_1 - v_2} =$

$$= \frac{d(v_1 - v_2 + v_1 + v_2)}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Je zřejmé, že v klidné vodě by projel závodník dráhu d oběma směry za dobu $t' = \dfrac{2d}{v_1}$.

Srovnáme-li zlomky $\dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}$, $\dfrac{2d}{v_1} = \dfrac{2dv_1}{v_1^2}$, pozorujeme, že mají stejného čitatele; větší je ten, který má menšího jmenovatele.

Platí tedy nerovnost $\dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2} > \dfrac{2dv_1}{v_1^2}$, která ukazuje, že by závodník byl dříve u cíle, kdyby projížděl tratí d v obou směrech v klidné vodě.

Zbývá ještě určit časový rozdíl. Tento rozdíl udává výraz

$$t_3 = t - t' = \frac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2} - \frac{2dv_1}{v_1^2} = \frac{2dv_1(v_1^2 - v_1^2 + v_2^2)}{v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} =$$

$$= \frac{2dv_1v_2^2}{v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} = \frac{2dv_2^2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)}.$$

Závěr: Závodník projede tratí d oběma směry za dobu $t = \dfrac{2dv_1}{v_1^2 - v_2^2}$ h.

Kdyby projížděl tuto trať v obou směrech v klidné vodě, potřeboval by k tomu čas $t' = \dfrac{2d}{v_1}$ h, přičemž $t' < t$.

Časový rozdíl je $t_3 = \dfrac{2dv_2}{v_1(v_1^2 - v_2^2)}$ h.

114. V prvém pavilónu továrny pracuje n dělníků, v druhém m dělníků a ve třetím s dělníků. Čtvrtina dělníků z prvého pavilónu, třetina z druhého a polovina z třetího jsou ženy. Kolik pracuje v továrně žen a kolik mužů?

115. Do prvého patra, které je ve výši a metrů, má být vedeno n schodů. O kolik by se musila zmenšit výška každého schodu, kdyby počet schodů vzrostl o tři?

116. Na stavbu vodní přehrady vyjelo n brigádníků, z nichž každý se zavázal, že odpracuje t hodin. Jeden brigádník však po cestě onemocněl a musil se vrátit; ostatní převzali jeho závazek na sebe. Na kolik hodin zvýšil každý ze zbývajících brigádníků svůj závazek?

117. Jestliže čísla x, y, z jsou navzájem různá, potom platí:

a) $\dfrac{xy}{(z-x)(z-y)} + \dfrac{xz}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{yz}{(x-y)(x-z)} = 1$;

b) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)} + \dfrac{x+z}{(x-y)(y-z)} = 0$. Dokažte to.

118. Dokažte, že hodnota výrazu $V = \dfrac{(a-1)^2}{(a-b)\,(a-c)} + \dfrac{(b-1)^2}{(b-a)\,(b-c)} + \dfrac{(c-1)^2}{(c-a)\,(c-b)}$ je kladné číslo, ať za a, b dosazujeme libovolná čísla, pro něž má výraz V smysl. Jaké vztahy musí platit o číslech a, b, c, aby výraz V měl smysl?

119. Zjednodušte výraz $V = \dfrac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \dfrac{a+b}{ab+a-2b-2} - \dfrac{a-b}{ab-a-2b+2}$ a ukažte, že je roven nule. Pro která čísla a, b má daný výraz smysl?

120. Za předpokladu, že uvedené výrazy mají smysl, proveďte:

a) $\dfrac{6x^3b^3}{25y^4}\cdot\left(-\dfrac{15y}{b^2}\right)$; b) $\dfrac{9x}{a^3}\cdot\left(-\dfrac{y}{32b^2}\right)\left(-\dfrac{4a}{27xy}\right)\cdot 24a^2b^3$;

c) $\dfrac{2v^2+8v+8}{v-2}\cdot\dfrac{(v-2)^2}{4(v+2)}$; d) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{a^2}{a-b}$;

e) $\left(\dfrac{m+1}{m+2}-\dfrac{m-1}{m-2}\right)\cdot\dfrac{m^2-4}{2m}$; f) $\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{2z}{z^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{z}-1\right)$;

g) $\left(\dfrac{3}{1+s}-1\right)\left(\dfrac{3}{2-s}-1\right)$; h) $\left(a-\dfrac{a}{a+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right)$;

i) $\left(y+1+\dfrac{1}{2y-1}\right)\left(y-1+\dfrac{1}{2y+1}\right)$;

j) $\left(\dfrac{p-1}{p-2}-\dfrac{p}{p-1}\right)\left(p-\dfrac{p}{p+1}\right)(p^2-1)$;

k) $\left[\dfrac{3}{(x-3)^3}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]\cdot\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+9}$;

l) $\left(\dfrac{x^2}{x-y}-x\right)\left(\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y}{x}\right)$.

121. Proveďte a uveďte podmínky, při kterých mají uvedené výrazy smysl:

a) $\dfrac{4a^2b}{9pq^2}:\dfrac{2ab^2}{3p^2q}$; b) $\left(\dfrac{18a^2}{b^3}\cdot\dfrac{c}{2a^3}\right):\left(-\dfrac{3a}{b^2c}\right)$;

c) $\dfrac{a^2+ax}{x-x^2}:\dfrac{x^2+ax}{a-ax}$; d) $\left(1+\dfrac{m}{1-m}\right):\dfrac{1+m}{1-m}$;

e) $\left(\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2+1}:\dfrac{6x-6}{x^4-1}\right):\dfrac{x+1}{3}$;

f) $\left(p+q-\dfrac{4pq}{p+q}\right):\dfrac{1}{p^2-q^2}$;

g) $\left(v+\dfrac{u-v}{1+uv}\right):\left[1-\dfrac{v(u-v)}{1+uv}\right]$;

*h) $\dfrac{r^4-s^4}{r^2s^2}:\left[\left(1+\dfrac{s^2}{r^2}\right)\left(1-\dfrac{2r}{s}+\dfrac{r^2}{s^2}\right)\right]$;

i) $\left(1+\dfrac{a^3}{b^3}\right):\left(1+\dfrac{a}{b}\right)$; j) $(c^3-d^3):\left(c+\dfrac{d^2}{c+d}\right)$.

***122.** Proveďte:

$$6a+\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}.$$

Pro která čísla a má daný výraz smysl?

123. Upravte a rozhodněte, v kterých případech nemají uvedené výrazy smysl:

a) $\dfrac{m-\dfrac{4}{m}}{m+2}$; b) $\dfrac{5+p}{5-\dfrac{p^2}{5}}$; c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-1}{\dfrac{a+b}{a-b}+1}$;

d) $\dfrac{\dfrac{x}{4}-\dfrac{x-1}{5}}{\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{x-1}{10}}$; e) $\dfrac{\dfrac{r+s}{r-s}-\dfrac{r-s}{r+s}}{1-\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$; f) $\dfrac{2-\dfrac{k^2+z^2}{kz}}{\dfrac{k}{z^2}-\dfrac{2}{z}+\dfrac{1}{k}}$;

g) $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{a}{b}}{\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2} : \dfrac{a^2}{b}$; h) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b^2}{a^2}}{1-\dfrac{b}{a}}\cdot(a^2-ab+b^2)$;

*i) $\dfrac{\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}$; *j) $\dfrac{\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+x+y}{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}}$.

124. Proveďte za předpokladu, že uvedené výrazy mají smysl:

a) $\left(\dfrac{2x}{3a}\right)^3\cdot\left(\dfrac{9a}{x}\right)^2$; b) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^3 : \left(-\dfrac{b}{a}\right)^6$;

c) $\dfrac{(a^4)^2\,.\,(b^2)^3}{(a^2)^4\,.\,a^2}\cdot\left(\dfrac{a}{b^3}\right)^2$; d) $2\left[\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2\cdot\dfrac{y}{x}\right]^3 : \left(\dfrac{y}{x}\right)^4$;

e) $\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{a^2}{2x}\right)^2\cdot\dfrac{3x^2}{(a^2)^3}$; f) $\left[\left(\dfrac{r}{s}\right)^2\cdot\left(\dfrac{s}{r}\right)^3\cdot\dfrac{r^2}{s^2}\cdot\left(-\dfrac{2r}{s}\right)\right]^2$;

g) $\dfrac{\left(\dfrac{u}{v}\right)^2-1}{\left(\dfrac{1}{v}\right)^2}$; h) $\dfrac{\left(\dfrac{b}{c}\right)^3-1}{\left(\dfrac{1}{c}\right)^3}+(-b)^3$;

i) $\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y^2}\right] : \left(\dfrac{x-1}{y}\right)^2$; j) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+2\right]\cdot\left(\dfrac{ab}{2}\right)^2$.

125. Proveďte: $\left[\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^3 : \dfrac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right]\cdot\dfrac{n}{3}$.

Pro která čísla n nemá výraz smysl?

126. Jsou dány výrazy:

$$U=\dfrac{\dfrac{1}{p-3}-\dfrac{1}{p+3}}{\dfrac{1}{p-3}+\dfrac{1}{p+3}}-\dfrac{p+3}{p},\quad V=\dfrac{\dfrac{1}{p^2-9}-\dfrac{1}{p^2+9}}{\dfrac{1}{p^2-9}+\dfrac{1}{p^2+9}}-\dfrac{p^2+9}{p^2}.$$

Rozhodněte, pro která čísla p nemají výrazy U, V smysl a přesvědčte se, že $U=V$.

127. Jeden stroj utká v metrů látky za t_1 hodin, druhý stroj utká totéž množství látky za t_2 hodin. Kolik metrů látky utkají oba stroje za t hodin?

***128.** Auto jede z místa A do místa B nejprve d km do kopce rychlostí v_1 km/h, potom u km s kopce rychlostí v_2 km/h. Jakou průměrnou rychlostí jede na celé trati?

***129.** V továrně pracovalo x dělníků. Jednoho dne však přešlo do zemědělství y dělníků. O kolik procent musí zvýšit zbývající dělníci svůj denní výkon, chtějí-li dodržet výrobní plán?

***130.** Z dané zásoby a litrů 70% kyseliny bylo vzato b litrů a nahrazeno stejným množstvím vody. Kolikaprocentní kyselina vznikla? Též pro $a=10$, $b=2$.

***131.** Sukno bylo prodáváno v partiovém obchodě se ztrátou $2\frac{1}{2}$ % z výrobní ceny. Kdyby se prodávalo se ziskem $5\frac{1}{4}$ % z výrobní ceny, získalo by se o n Kčs více, než činila výrobní cena. Jaká byla prodejní cena sukna?

132. Dokažte, že součet čísel $(1+q)$ a $\left(1+\dfrac{1}{q}\right)$ se rovná jejich součinu ($q\neq 0$).

133. Dokažte, že rozdíl čísel $\left(2+p+\dfrac{1}{p}\right)$ a $(1+p)$ se rovná jejich podílu ($p\neq 0, p\neq -1$).

134. Je-li $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=1$, je $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{c}{d}=\left(\dfrac{c}{d}\right)^2+\dfrac{a}{b}$. Dokažte.

$\left[\text{Návod: } \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\left(\dfrac{c}{d}\right)^2.\right]$

***135.** Určete dva zlomky, jejichž rozdíl se rovná jejich součinu.

136. Ukažte, že platí vztahy:

a) $(a^2-1)\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}-1\right)=3-a^2,\ a\neq 1,\ a\neq -1$;

b) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right) : \left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right)=\dfrac{1}{a},\ a\neq 1,\ a\neq 0$;

c) $1-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a+1}}=1-a-a^2, a\neq -1$.

***137.** Ukažte, že pro přípustné hodnoty čísel x a y platí vztahy:

a) $\left(\dfrac{5y}{y+x}+\dfrac{5x}{y-x}+\dfrac{10xy}{y^2-x^2}\right)\left(\dfrac{y}{y+x}+\dfrac{x}{y-x}-\dfrac{2xy}{y^2-x^2}\right)=5$;

b) $\left(\dfrac{x-y}{x^2+xy}-\dfrac{x}{y^2+xy}\right) : \left(\dfrac{y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{y-x}{y}$.

***138.** Ukažte, že pro přípustné hodnoty čísel a, b platí vztahy:

a) $\left[\dfrac{a+b}{2(a-b)} - \dfrac{a-b}{2(a+b)} - \dfrac{2b^2}{b^2-a^2}\right]\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{2}{a}$;

b) $\left[\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\cdot\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2} + \dfrac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right] : \dfrac{a-b}{a^3b^3} = \dfrac{ab}{a-b}$.

***139.** Ukažte, že platí vztah:

$$\left[\left(\frac{r}{s}-\frac{s}{r}\right):(r+s)+r\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)\right]:\frac{1+r}{s}=\frac{r-s}{r}.$$

Které podmínky musí být splněny, aby tento výraz měl smysl?

140. Je dán zlomek $\dfrac{a}{b}$ v základním tvaru. Dokažte, že také zlomek $\dfrac{b-a}{b}$ je v základním tvaru, jsou-li čísla a, b přirozená a $b > a$.

Řešení

Předpokládejme, že zlomek $\dfrac{b-a}{b}$ není v základním tvaru.

Potom je $b - a = kp$, $b = kq$, kde čísla k, p, q jsou přirozená, přičemž $k \neq 1$.

Z uvedených rovnic však plyne vztah $kq - a = kp$, odkud je $a = k(q-p)$.

Zlomek $\dfrac{a}{b}$ je možno psát ve tvaru $\dfrac{k(q-p)}{kq}$ a lze ho krátit číslem $k \neq 1$.

Tím jsme ovšem došli ke sporu, neboť zlomek $\dfrac{a}{b}$ byl dán v základním tvaru. Je tedy předpoklad, že zlomek $\dfrac{b-a}{b}$ není v základním tvaru, nesprávný a platí opak.

Závěr: Je-li $\dfrac{a}{b}$ zlomek v základním tvaru, je i zlomek $\dfrac{b-a}{b}$ v základním tvaru.

141. Je-li zlomek $\dfrac{a}{b}$ v základním tvaru, jsou i zlomky $\dfrac{a+b}{a}$, $\dfrac{a+b}{b}$ v základních tvarech. Dokažte to.

***142.** Dokažte, že součet dvou zlomků v základním tvaru, jejichž jmenovatelé jsou dvě různá čísla, není nikdy celé číslo.

[Návod: Má platit $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=m$, kde m je celé číslo. Odtud plyne, že součet $(ad + cb)$ musí být dělitelný číslem b i d. Je tedy $d = k_1 b$, $b = k_2 d$, $k_1 . k_2 = 1$, $b = d$ proti předpokladu.]

***143.** Je dán výraz $V = \left[\dfrac{4x}{x^2+4}\left(\dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{x}{2x-4}\right)-\dfrac{4}{x^2-4}\right]:\dfrac{x}{x-2}$.

a) Pro která čísla x ztrácí výraz V smysl?

b) Upravte jej a najděte všechna celá čísla x, pro která je výraz V roven celému číslu.

***144.** Je dán výraz $V = \left[\dfrac{a+b}{2a-2b}-\dfrac{a-b}{2a+2b}+\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}\right]:\dfrac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}$.

a) Výraz V zjednodušte a udejte, pro která čísla a, b nemá smysl.

b) Určete všechny dvojice čísel a, b, pro která je $V = 10$.

***145.** Je dán výraz $V = \left[\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]:\left[\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right]$.

a) Udejte, pro která čísla a, b nemá výraz V smysl, a potom ho zjednodušte.

b) Určete, pro která čísla a, b je $V = 0$, $V > 0$, $V < 0$.

146. Zjednodušte:

a) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{1+a}}$;

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}}$;

c) $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}}$;

d) $\dfrac{b-a}{1+\dfrac{1}{b-a+\dfrac{1}{b-a+\dfrac{1}{b-a}}}}$;

e) $\dfrac{a+b}{1-\dfrac{1}{a+b-\dfrac{1}{a+b-\dfrac{1}{a+b}}}}$.

VÝSLEDKY

I. MNOHOČLENY, LINEÁRNÍ ROVNICE

1. OPAKOVÁNÍ O MNOHOČLENECH ZE ZÁKLADNÍ DEVÍTILETÉ ŠKOLY

1. $t + 2p + 3k + 4m + 5v + 6s + 16$. **2.** $m - 10x - 9y - 8z - 11v$. **3.** $(r - t)nc + d$. **4.** $ab + 2ac + 2bc - 2xy - rs$. **5.** $14m + 6n$. **6.** $5m + n + 15$. **8.** a) $4x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 1$; b) $-1 + 4x - 3x^2 - 4x^3$; c) $3x^4 - x^3y - 3x^2y^2 + y^4$; d) $1 + 2x - 2x^2 - x^3$; e) $1 - 3x + 20x^2$. **9.** a) $10a^4 - 10a^3b + 4a^2b^2 - 20ab^3 + 2b^4$; b) $-6a^3b + 12ab^3 - 4b^4$; c) $6a^3b - 12ab^3 + 4b^4$. **10.** a) 0; b) -4; c) -1; d) -21.

11. a) 2; b) 13; c) 2; d) -2. **12.** a) 32; -32; b) -185; 185. **13.** -88. **14.** 0. **15.** -14. **16.** 13; 17; 23; 31; 41; 53; 67; 83; 101. **17.** 7; 11; 17. **18.** a) 0; b) 0; c) $5x - 3y + 9z$; d) $p^2 + q^2 + r^2$; e) y^3; f) $abc + abd - acd + bcd$; g) $38ab - 42a^2$; h) $0{,}7x^2 + 18{,}58xy - 0{,}4y^2$; i) $2r^5 + 2r^3$; j) $8x^6 + x^4$; k) $3a^4y^2 - a^4$. **19.** a) $6am$; b) 2; c) $p^3 + q^3$; d) $1{,}728\,p^3 - 0{,}125\,q^3$; e) $v^4 - 1$; f) $a^5 - b^5$; g) $a^5 + b^5$; h) $2 - 14x$; i) $8a^3 - b^3$; j) $4a^4 + 8a^3 + 4a^2 - 1$; k) $2u^2 + 2v^2 + 2t^2$; l) $m^3 + n^3 + r^3 - 3mnr$. **20.** $x^6 + x^5 - x^4 + x^2 - x - 1$.

21. 10,32. **22.** 16,4. **23.** Zvětší se o $z^3 + 6z^2 + 11z$; 204. **24.** Zmenší se o $az + bz - z^2$; $z < a$, $z < b$; pro $a = 10$, $b = 8$, $z = 3$ je $az + bz - z^2 = 45$. **25.** a) $2x - 5$; b) $a^2 + ab + b^2$; c) $c^2 - 2c - 5$; d) $3y^2 + 2y - 5$; e) $x^2 - 5x - 1$. **26.** $p^3 + 5p^2 + 13p + 8$. **28.** a) $1{,}44x^4y^2 - 1{,}2x^5y^3 + 0{,}25x^6y^4$; b) $6{,}25m^4n^6 + m^5n^5 + 0{,}04m^6n^4$; c) $a^{2m} + 2a^mb^n + b^{2n}$; d) $25x^6 - 20x^3y^n + 4y^{2n}$. **29.** a) 5 050; b) 21 250; c) 180 162; d) 0,539 2.

31. $2(6x^4 + 7x^2 - 12)$. **35.** a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$; c) $9x^4 + 12x^3y - 14x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4$; d) $1 + 2x^n - x^{2n} - 2x^{3n} + x^{4n}$; e) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$; f) $4m^2 + 9k^2 + 16p^2 + 25q^2 + 12km + 16pm - 20qm + 24kp - 30kq - 40pq$. **37.** a) $7x^3 - 6x^2 - 6x + 7$; b) $18x^2y + 12xy^2 + 2y^3$; c) 1. **38.** a) a^8; b) $64x^6 - 48x^4 + 12x^2 - 1$; c) $(a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$. **40.** a) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$; b) $a^{12} + 12a^{10} + 60a^8 + 160a^6 + 240a^4 + 192a^2 + 64$; c) $64x^6 - 192x^5 + 240x^4 - 160x^3 + 60x^2 - 12x + 1$.

41. $(a + b)^3$; $12(a + b)^2$. **42.** a) $8ab$; b) $16p^2$; c) $169x^8 + 338x^4y^6 + 169y^{12}$. **44.** $-2xz - 2yz$. **45.** $2a + 2b + 3$. **47.** $-m^2 + 4mn - 2np$. **49.** $a^2 + b^2 + c^2 + 1$. **50.** $x = -2$, $y = -2\frac{2}{3}$.

2. ROZKLAD MNOHOČLENŮ V SOUČIN

51. a) $2m(p - q)$; b) $2y(ab - 5ac + 4bc)$; c) $7ux(u^2v + 2uv^2x - 3x^3)$; d) $pq^2r(p^2 + qr + 1)$; e) $x^2y^2(x + y + 1)$; f) $x(a + b) . (a + b + x)$; g) $3v^2(v - r)^2(3v - r)$; h) $ax^3(x - a)^2$; i) $2(2b + 3c)(2b - 3c)$; j) $(4a - b) . (2a + b)$; k) $(a - b)(3p^2 - 5q) . (3p^2 + 5q)$; l) $(3x - y + z)(3x - y - z)$; m) $(m - n + p)(m + n - p)$; n) $x^2(a - b)(x + 1)(x - 1)$; o) $2^4(6x - y) . (y - x)$; p) $(u + 6v - 3q)(u + 3q)$; r) $x(5x - 12a)$; s) $7q(8p - q)$; t) $3 . 2^2 . (a + 3b) . (3a + b)$; u) $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$; v) $x^2(a + b)^2(p - q + 1)$. **52.** a) $2a(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$; b) $2(a^2 + 4) . (a + 2)(a - 2)$; c) $s(2r + s)(2r^2 + 2rs + s^2)$; d) $(a + b) . (c + nd)$; e) $(a + b)(a + b - c)$; f) $(x - y)(z - x + y)$; g) $(m - n)^2(m + n)$; h) $(x - 3) . (x - 2)(x + 2)$; i) $(y + 2)(y - 2) . (p + 1)(p - 1)$; j) $(k + 1)(k - 1) . (2k^2 - k + 2)$; k) $ay(a - b) . (1 + a + b)$; l) $a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2)$; m) $(y^2 + 1)(y - 1)^2$; n) $(h + 1)(2h - 1)$; o) $2a^2(a + 1)^3$; p) $r(3r - 1) . (9r^2 + 3r + 1)$; q) $2a^2x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; r) $2b(3a^2 + b^2)$; s) $(x + 1)^2 . (x^2 - x + 1)$; t) $(m^2 + 1)(m^2 + m + 1)(m - 1)$; u) $(y + 1)(y - 2)^2$. **53.** a) $(a^2 + 2a + 2) . (a + 1)$; b) $(b^2 + 1)(2b^2 + b + 2)$. **56.** a) $x(x + 7) . (x - 6)$; b) $x^2(x + 1)(x - 10)$; c) $x^3(x + 8)(x - 7)$; d) $(x^2 + 3)(x + 1) . (x - 1)$; e) $(x^2 + 3)(x^2 + 8)$; f) $(y^2 - 5)(y^2 - 8)$; g) $a(a^2 + 4)(a + 1) . (a - 1)$; h) $(2x - 1)(2x - 3)$; i) $(3a - 1)(3a - 2)$; j) $2(b - 1)(2b - 5)$. **57.** a) $(a + 2)(3a - 1)$; b) $(y + 1)(2y + 1)$; c) $(2 - 3x^2)(3 - 2x^2)$; d) $(4a + 1)(a - 1)$; e) $(y^2 + 1)(2y^2 - 1)$; f) $(2p + 1)(3p - 1)$; g) $(3a - 5) . (2a + 1)$; h) $(2x - 3)(5x + 1)$. **58.** a) $(x - 2)(x + a - 1)$; b) $(x - 1) . (x - a - 1)$. **60.** a) $3(x + y)(y + z)(z + x)$; b) $3(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) . (x^2 - z^2)$; c) $(a + b)^2 . (a - b)^2 . (p + q)^2 . (p - q)^2$.

62. $3abc(a - b)(b - c)(c - a)$. **66.** $V = (x - z)(y - z)(x - y)$; $V \neq 0$, jestliže $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$. **67.** a) 2; 3; a; $2a$; $3a$; 6; $6a$; b) 5; p; q; $5p$; $5q$; pq; $5pq$; c) 2; a; a^2; b; $2a$; $2a^2$; $2b$; ab; a^2b; $2ab$; $2a^2b$; d) x; $x - y$; $x^2 - xy$; e) a; $a + 1$; $a(a + 1)$; $(a + 1)^2$; $a(a + 1)^2$; f) $9x^2 + 4y^2$; $3x + 2y$; $3x - 2y$; $9x^2 - 4y^2$; $(3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)$; $(3x + 2y)(9x^2 + 4y^2)$; $81x^4 - 16y^4$. **68.** a) $2a^4b^3x^2$; b) $a + 1$; c) $b(a + 3)$; d) $(p - 1)(p^2 + 1)$; e) $m - n$; f) $a + 3$; g) $b + 5$; h) $a^2 - b^2$; i) $2a - 1$; j) $u^2 - uv + v^2$; k) $q^2 - q + 1$; l) $x - 3$; m) $a - 2$; n) $y - 4$. **69.** a) $a^5b^4x^5$; b) $ab(x^2 - 1)$; c) $y^2(y^2 - 1)^2$; d) $px(p - 2q) . (p^2 - q^2)$; e) $(a^2 - b^2) . (c^2 - d^2)$; f) $(r + 2s)(r - 6s)(r - 3s)$; g) $(4 - x^2) . (4 + 2x + x^2)$; h) $(a^4 - 1)(a^2 - a + 1)$; i) $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$; j) $x(x - 8) . (x - 2)(x + 3)$. **70.** a) $D = x^2 - y^2$, $n = (x^4 - y^4)(x^2 + xy + y^2) . (x^2 - xy + y^2)$; b) $D = x + 1$, $n = x^4 - 1$; c) $D = 2a + 3b$, $n = (2a+3b)^2 . (a - 3b)$; d) $D = x(x + y)$, $n = 4x(x + y)(2x - 2y + 1) . (x^2 - xy + y^2)$; e) $D = a(a + 2b)$, $n = 3a^2(a + 2b)^2(a - 2b)$; f) $D = 2xy(x - 2y)$, $n = 4x^2y^2(x - 2y)^2(x^2 + 2xy + 4y^2)$; g) $D = 1$, $n = (m + 1)(m - 1)^2$; h) $D = x$, $n = 30x(x^2 - 1)$; i) $D = x$, $n = x^3(x^8 - 1)$; j) $n = (x + y)$.

$(x^2 - xy + y^2) . x^2$; k) $n = (a + b)(c + d)(e + f)$; l) $D = x - 5, n = (x - 5)(x + 9)(2x + 1)$; m) $D = x + 2$, $n = x^4 - 5x^2 + 4$.

71. $D = (x - y)(x - 2)$, $n = (x^2 - y^2)(x^2 - 4)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$. **72.** $z^3 - z^2 - 9z + 9$; $z^3 + 3z^2 - z - 3$. **73.** a) $m + 3$; b) $z + 3$; c) $x + 4$; d) $y - 7$; e) $3 + a^2$; f) $3n - 2$. **74.** a) $(a - 1)(3a - 2)$; b) $m^2 - mn$. **75.** a) $u = 64$; b) $u = -165$; c) $u = -280$. **76.** $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1$

3. ZLOMKY

81. $\frac{3\,600n}{t}$. **82.** $\frac{x + y}{c}$. **83.** $\frac{xh + (x - y)k}{h + k}$. **84.** $\frac{m}{10x + 8y}$; $\frac{1}{2}$ ha. **85.** $\frac{(y + 30) . n}{y}$; 78. **86.** a) $-11\frac{6}{7}$; b) $1\frac{18}{83}$. **87.** a) $-1{,}4$; b) $-1{,}5$; c) -6. **88.** $-\frac{4}{7}$. **89.** a) $x \neq 0$; b) $x \neq 1$; c) $x \neq y$; d) $x \neq 0, x \neq 2$; e) $x \neq -2$; f) $x \neq -2, x \neq -3$; g) $x \neq -1$; h) $x \neq -m, x \neq n$.

91. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. **92.** $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$. **93.** x libovolné.

94. 15. **95.** a) $\frac{19n}{20}, \frac{7n}{10}, \frac{n}{2}, \frac{2n}{5}, \frac{3n}{8}$; b) $\frac{3n}{8}, \frac{2n}{5}, \frac{n}{2}, \frac{7n}{10}, \frac{19n}{20}$. **98.** f) $\frac{2a + 1}{2a - 1}$; g) $3z - 2$; h) $\frac{a - 4}{b}$; i) $\frac{a + b - c}{a - b + c}$; j) $\frac{p - 2}{q - 1}$; k) $\frac{a + 2}{a - 2}$; l) $\frac{x - 1}{x + 1}$; m) $\frac{u + 3}{u - 3}$; n) $\frac{a - 3}{3}$; o) $\frac{r - 2}{r + 3}$; p) $\frac{x - 2}{x - 3}$; q) $\frac{a + 4}{a + 6}$; r) $\frac{3x - 5}{4x - 7}$; s) $\frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$; t) $\frac{x}{y(x - y)}$.

103. Nemá smysl pro $a = 4$ a $x + a + 4 = 0$; $z = \frac{x}{a - 4} + 1$. **104.** a) $a + 3$; b) $\frac{5d - 7}{12}$; c) $\frac{xy}{6}$. **105.** a) 1; $m \neq n$; b) $\frac{2}{z}$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; c) $\frac{a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}{a^5}$; $a \neq 0$; d) $\frac{1 - u}{u + 1}$; $u \neq -1$; e) $\frac{(m + n)^2}{m - n}$; $m \neq n$; f) 0; $q \neq 0$; g) $\frac{2}{p}$; $p \neq 0, p \neq -q$; h) $\frac{a - b}{a + b}$; $a \neq b, a \neq -b$; i) $\frac{x^2}{1 - x^2}$; $x \neq 1$, $x \neq -1$; j) $\frac{4p - 6q}{2p + 3q}$; $p \neq \frac{3}{2}q$, $p \neq -\frac{3}{2}q$; k) $\frac{v^2 - 12v + 3}{2v(v^2 - 9)}$; $v \neq 0, v \neq 3, v \neq -3$; l) $\frac{4n - m}{6(m - n)^2}$; $m \neq n$; m) $-\frac{1}{a}$; $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$.

106. $\frac{3 - 5a}{a^2 - 1}$; $a \neq 1, a \neq -1$; pro $a = 0$ má výraz hodnotu -3. **107.** $\frac{a^3 + a}{a^2 - a + 1}$, a libov. **108.** $\frac{2x^2 + 4x - 2}{(x^2 - 1)^2}$; a) $1\frac{5}{9}$; b) $-\frac{2}{9}$; $x \neq 1$, $x \neq -1$.

109. $\frac{10}{(x - 5)(x + 2)(1 - x)}$; $x \neq 5$, $x \neq -2$, $x \neq 1$. **110.** O $(x - 1)$.

114. $\frac{3n + 4m + 6s}{12}$; $\frac{9n + 8m + 6s}{12}$. **115.** O $\frac{3a}{n(n + 3)}$ metrů. **116.** Na $\frac{tn}{n - 1}$. **118.** $V = 1$; čísla a, b, c musí být navzájem různá. **119.** $a \neq 2$, $b \neq 1$, $b \neq -1$. **120.** a) $-\frac{18x^3b}{5y^3}$; b) b; c) $\frac{1}{2}(v^2 - 4)$; d) $-\frac{a}{b}$; e) -1; f) $\frac{1}{z}$; g) 1; h) $a - 1$; i) y^2; j) $\frac{p^2}{p - 2}$; k) $\frac{x^3 - 6x^2 + 12x + 9}{x^4 - 81}$; l) $\frac{x^2 + xy + y^2}{y}$.

121. a) $\frac{2ap}{3bq}$; $p \neq 0$, $q \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) $-\frac{3c^2}{a^2b}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; c) $\frac{a^2}{x^2}$; $x \neq 0$, $a \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -a$; d) $\frac{1}{1 + m}$; $m \neq 1, m \neq -1$; e) $(x-1)^2$; $x \neq 1$, $x \neq -1$; f) $(p - q)^3$; $p \neq q$, $p \neq -q$; g) u; $1 + uv \neq 0$; h) $\frac{r + s}{r - s}$; $r \neq 0$, $s \neq 0$; $r \neq s$; i) $\frac{b^2 - ab + a^2}{b^2}$; $b \neq 0$, $a + b \neq 0$; j) $c^2 - d^2$; $c + d \neq 0$, $c^2 + cd + d^2 \neq 0$. **122.** $(a + 2)^2$; $a \neq 2$, $a \neq -2, a \neq 0$. **123.** a) $\frac{m - 2}{m}$; $m \neq 0$, $m \neq -2$; b) $\frac{5}{5 - p}$; $p \neq 5$, $p \neq -5$; c) $\frac{b}{a}$; $a \neq 0$, $a \neq b$; d) $\frac{3}{4}$; $x \neq -4$; e) $-\frac{2r}{s}$; $r \neq s, r \neq -s, s \neq 0$; f) $-z$; $k \neq 0$, $z \neq 0$, $k \neq z$; g) $\frac{1}{a - b}$; $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$; h) $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{ab}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; i) $\frac{a + b}{a - b}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; j) $\frac{x^2}{x - y}$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$. **124.** a) $\frac{24x}{a}$; b) $\frac{a^{12}}{b^{15}}$; c) 1; d) $\frac{2x^7}{y^7}$; e) $\frac{1}{2a^2}$; f) $\frac{4r^4}{s^4}$; g) $u^2 - v^2$; h) $-c^3$; i) $\frac{x}{x - 1}$; j) $\frac{(a^2 + b^2)^2}{4}$. **125.** $\frac{n + 2}{n - 2}$. **126.** Výrazy nemají smysl pro $p = 0$,

$p = 3$, $p = -3$; $U = V = -1$. **127.** $\dfrac{vt(t_1 + t_2)}{t_1 \,.\, t_2}$. **128.** $\dfrac{v_1 v_2 (u + d)}{v_1 u + v_2 d}$. **129.** $\dfrac{100y}{x - y}$; $x > y$, $y > 0$. **130.** $\dfrac{(a - b) \,.\, 70}{a}$ procentní; 56 %.

131. $\dfrac{130n}{7}$ Kčs. **135.** $\dfrac{a}{b}, \dfrac{a}{a + b}$. **143.** Výraz V ztrácí smysl pro čísla $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$. Jeho upravený tvar je $V = \dfrac{2}{x + 2}$, $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Je číslem celým pro hodnoty $x = -1$, $x = -3$, $x = -4$. **144.** a) $V = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$; $a = b$, $a = -b$; b) $a = 4$, $b = 2$ nebo $a = 2$, $b = 4$. **145.** Výraz V nemá smysl pro $a = b$, $ab = 0$, $a = -b$; po zjednodušení je $V = \dfrac{ab}{a^2 + b^2}$; V se nerovná nule pro žádné a, b. Je-li $a > 0$, $b > 0$ nebo $a < 0$, $b < 0$, je $V > 0$; je-li $a > 0$, $b < 0$ nebo $a < 0$, $b > 0$, je $V < 0$. **146.** a) $\dfrac{a(1 + a)}{a + 2}$, $a \neq -2$, $a \neq -1$; b) $\dfrac{a^2 + a + 1}{2a^2 + a + 2}$, $a \neq 0$; c) $\dfrac{a^3 - 2a}{a^4 - a^2 - 1}$; $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a^2 - 2 \neq 0$, $a^4 - a^2 - 1 \neq 0$; d) $\dfrac{(b - a)^4}{(b - a)^3 + (b - a)^2 + 1}$; $a \neq b$, $(b - a)^3 + (b - a)^2 + 1 \neq 0$; e) $\dfrac{(a + b)^4}{(a + b)^3 - (a + b)^2 + 1}$; $a \neq -b$, $a + b \neq 1$, $a + b \neq -1$, $(a + b)^3 - (a + b)^2 + 1 \neq 0$.